ESPECIALIDAD / OPTATIVA
1^{er} Cuatrimestre de 2005

RETICULOS EN ESPACIOS EUCLIDEOS

Docente: Juan Pablo Rossetti
Correlativas:
Para la Lic. en Matemática: Análisis Matemático III y Algebra II.
Para la Lic. en Computación: Algebra y Análisis Matemático II.
Carga horaria: 120 horas.

Introducción. Un *retículo* (o *lattice*) en un espacio Euclideo $\mathbf{R}^n$ es el conjunto de combinaciones lineales enteras de n vectores linealmente independientes de $\mathbf{R}^n$. Es decir,

$$\Lambda := \sum_{i=1}^{n} m_i \, \mathbf{v_i}$$

donde $m_i \in \mathbf{Z}$ y $\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}\}$ es una base de $\mathbf{R}^n$. Con la operación de suma de vectores, Λ es un grupo abeliano.

Entre los problemas más importantes relacionados con lattices están: empaquetamiento de esferas (*packing problem*); cubrimiento con esferas (*covering problem*); número de contacto (*kissing number*); retículos cuantizadores (*lattice quantizer problem*); todos con muchísimas aplicaciones.

Si bien en el curso se verán los lattices más bien desde un punto de vista geométrico, en la actualidad, muchos de estos problemas son abordados con algoritmos y métodos computacionales. Por ejemplo, la reciente solución al famoso problema de empaquetamiento de esferas en dimensión 3 —*Conjetura de Kepler*— involucra una gran cantidad de algoritmos y cuentas hechas con la computadora (las cuales llevarán años para su completa verificación).

Objetivos. Se pretende dar un panorama general de los lattices en $\mathbf{R}^n$ y de los problemas más importantes relacionados con ellos, y que los alumnos adquieran herramientas como para entender y, con un poco de audacia, atacar algunos de estos problemas.

Bibliografía. El curso no seguirá ningún apunte ni libro; sin embargo, la principal referencia es el libro de Conway-Sloane **[CS]**.

[CS] *Sphere Packings, Lattices and Groups*, por J. H. Conway y N. J. A. Sloane. Springer-Verlag, New York, 1999 (3rd Edition).

[E] *Lattices and Codes* (A course partially based on Lectures by F. Hirzebruch), por W. Ebeling. Vieweg, 1994.

[C] *The sensual (quadratic) form*, por J. H. Conway. The Carus Math. Monographs, nro. 26, 1997.

[O] *Introduction to Quadratic Forms*, por O. T. O'Meara. Springer-Verlag, 1973.

PROGRAMA de "RETICULOS EN ESPACIOS EUCLIDEOS"

El programa propuesto se detalla a continuación; sin embargo, los temas del curso se adaptarán un poco de acuerdo a la audiencia y sus intereses.

1. **Motivación.** Planteo de los problemas más importantes relacionados con lattices, mencionados en la Introducción: problemas de empaquetaminetos; de cubrimientos, de kissing numbers y de cuantizadores.

2. **Lattices. Generalidades.** Ejemplos en dimensiones bajas. Celdas de Dirichlet-Voronoi. Celda de Voronoi de un lattice. Triangulación de Delone. Vectores de Voronoi. Bases, superbases y superbases obtusas. Matriz, determinante y discriminante de un lattice. Parametrizaciones. Forma y algoritmo de Minkowski y de Korkine-Zolotareff. Vonormas y conormas de lattices. Conormas en dimensiones bajas. Algoritmos de reducción. Clases de Bravais y de Bravais-Voronoi. Simetría de algunas fórmulas usando conormas.

   Formas cuadráticas definidas positivas. Relación con lattices. Funciones theta. Algunos teoremas básicos de la teoría de lattices (suma directa, cancelación).

3. **Algunos lattices importantes.** Lattices enteros. Dual de un lattice. Lattices unimodulares. Lattices de Raíces. El método de pegado de Kneser. El lattice cúbico Z^n. Los lattices A_n y A_n^*. Los lattices D_n, D_n^+ y D_n^*. Los lattices E_6, E_7 y E_8. El lattice de Leech.

4. **Relación entre lattices y códigos.** Códigos. Códigos binarios y lineales. De códigos a lattices y de lattices a códigos. Códigos autoduales y lattices unimodulares pares. El problema de los sombreros rojos y azules. Códigos de Hamming. El lattice E_8.

5. **Isospectralidad de lattices.** Fórmula de Poisson. Ejemplo de Milnor (y Witt) en dimensión 16, de Kneser en dimensión 12. Ejemplos de Conway-Sloane en dimensión 6 y 5. Ejemplos de Schiemann y de Conway-Sloane en dimensión 4. Dimensión 3: Teorema de Schiemann con métodos computacionales.

6. Soluciones a algunos problemas. Mejor lattice packing y lattice covering en dimensiones muy bajas.

   Algunos temas posibles para agregar:

7. **Poliedros.** Sólidos platónicos y arquimedianos. Solidos que llenan el espacio, parallelohedra. Embaldozamientos del plano (*tilings*).

8. **Platycosms.** Descripción, parametrización y estudio de las variedades planas en dimensión 3, o *platycosms*. Isospectralidad de platycosms.

9. **Lattices laminados.** Mejores empaquetamientos con lattices conocidos hasta el momento.

10. **Lattice quantizers.** Solución al problema del óptimo lattice quantizer en dimensión 3 por Barnes y Sloane.