GEOMETRÍA I - Año 2004
Práctico 0

Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto X. Demostrar las siguientes afirmaciones

1. $A \subseteq B \iff A \cap B = A$.
2. $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.
3. $A \subseteq B \Longrightarrow B = A \cup (B \setminus A)$ y $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
6. $A \subseteq B \cap C \Longrightarrow A \subseteq B \wedge A \subseteq C$.
7. $A \cup B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq C$.
8. $A \setminus B = A \cap B^C$.
9. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
   $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ (Leyes de De Morgan)

10. Sea $f : X \to Y$, $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$. Probar:
    (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
    (b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Además, f inyectiva $\Rightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
    (c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
    (d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
    Demostrar también:
    (e) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ (y se cumple la igualdad si f es inyectiva).
    (f) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$ (y se cumple la igualdad si f es sobreyectiva).
    (g) $f^{-1}(C^C) = \left[f^{-1}(C)\right]^C$.
    (h) Si f es inyectiva entonces $f(A^C) \subseteq [f(A)]^C$.
    (i) Si f es sobreyectiva entonces $[f(A)]^C \subseteq f(A^C)$.
    Además:
    (j) En todos los items donde probó alguna contención, busque ejemplos de funciones que muestren que a veces no se cumple la igualdad.
    Finalmente:
    (k) f es inyectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$. ($\mathrm{id}_X : X \to X$ es la función identidad de X, esto es, $\mathrm{id}_X(x) = x \ \forall x \in X$).
    (l) f es suryectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
    (m) **Corolario:** f es biectiva si y sólo si existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{id}_Y$