GEOMETRÍA I - Práctico 1 - 2004

1. Considerar el siguiente sistema matemático compuesto por los siguientes

   términos indefinidos: puertas, habitaciones, puerta pertenece a una habitación.

   Definición: El conjunto $\mathcal{C}$ de todas las puertas y de todas las habitaciones se llama casa.

   Postulados:

   (a) Todo par de habitaciones tiene exactamente una puerta en común.
   (b) Toda puerta está en exactamente dos habitaciones.
   (c) Hay exactamente cuatro habitaciones en la casa.

   Determinar cuántas puertas hay en la casa y hacer un esquema gráfico de la misma.

2. Probar que los axiomas de orden implican que las rectas tienen una cantidad infinita de puntos.

3. Considerar el 'plano' $P := \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \{(m, n) : m, n \in \mathbf{Z}\}$ y las 'rectas' como los subconjuntos de P de dos elementos.

   Verificar que este es un ejemplo donde se satisfacen los axiomas de incidencia pero donde las rectas no tienen una cantidad infinita de puntos.

4. Demostrar que en un plano π, existen siempre infinitas rectas:

   (a) Primero, usando los axiomas de orden.
   (b) * Luego, sin usar los axiomas de orden.

5. Dado $p \in \pi$, denotamos con H_p el *haz de rectas* que pasan por p.

   (a) Demostrar que todo punto del plano pertenece a alguna recta de H_p.
   (b) No toda recta del plano, es una recta de H_p.
   (c) Demostrar que los axiomas de orden implican que H_p tiene infinitas rectas.
   (d) Mostrar con un ejemplo que sin los axiomas de orden se puede construir un plano (que satisfaga los axiomas de incidencia) que no satisfaga c).

6. Demostrar que todo segmento se puede expresar como la intersección de dos semirrectas.

7. Demostrar que si $b \in \overline{ac}^{\circ}$ entonces $c \notin \overline{ab}^{\circ}$.

8. Dados cuatro puntos a, b, c y d alineados, demostrar que si d está entre a y b entonces también estará entre a y c o entre b y c.