GEOMETRÍA I - Práctico 2 - 2004

1. Analizar la validez de cada una de las siguientes afirmaciones. En caso de ser verdadera probarla, y si no, dar un contraejemplo que muestre su falsedad.
   (a) La intersección de conjuntos convexos es convexa.
   (b) La unión de conjuntos convexos es convexa.
   (c) Si A es convexo, entonces A^c es convexo.
   (d) Si A y B son convexos entonces $A - B$ es convexo.
   (e) El plano es convexo.
   (f) Todo semiplano es convexo.
   (g) Toda recta es convexa.
   (h) Toda semirrecta es convexa.
   (i) Todo ángulo es convexo.
   (j) El sector angular es convexo.
   (k) El exterior de un ángulo es convexo.

2. Sea p un punto de la recta A del plano π, y sea $q \in \pi - A$. Probar que la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{pq}$ está contenida en $\overset{\vee}{A}_q$.

3. Un punto se dice exterior a un ángulo si no pertenece al sector angular. Una semirrecta se dice exterior al ángulo si tiene origen en el vértice y pasa por un punto exterior al ángulo. Probar que si $\overrightarrow{R}$ es una semirrecta exterior a un ángulo, entonces todos sus puntos son exteriores al ángulo.

4. Tomemos un ángulo formado por las semirrectas A y B y una semirrecta C interior a $\angle AB$.
   (a) Probar que las semirrectas A y B quedan en semiplanos distintos respecto de la recta que contiene a C.
   (b) Sean a y b puntos en A y B respectivamente, probar que C corta a $\overline{ab}$.

5. Sea A una recta y o un punto perteneciente a la recta A. Sean además x e y dos puntos en un mismo semiplano abierto respecto de A, tales que $y \notin \overleftrightarrow{ox}$.
   (a) la recta $\overleftrightarrow{ox}$ divide a A en dos semirrectas: una que está en $\overleftrightarrow{ox}_y$ llamada A^y, y la otra que está en $\overset{\vee}{\overleftrightarrow{ox}}_y$ llamada $\overset{\vee}{A^y}$. Análogamente, la recta $\overleftrightarrow{oy}$ divide a A en dos semirrectas: una que está en $\overleftrightarrow{oy}_x$ llamada A^x, y la otra que está en $\overset{\vee}{\overleftrightarrow{oy}}_x$ llamada $\overset{\vee}{A^x}$.
   (b) probar que $A^x = \overset{\vee}{A^y}$ y $A^y = \overset{\vee}{A^x}$.
   (c) el sector angular $\angle xoy$ está estrictamente contenido en el mismo semiplano respecto de A en el que están x e y.

6. Sea $\angle aob$ un ángulo.

   (a) Si $m \in \overline{oa}$ y $n \in \overline{ob}$, probar que $\overline{mn} \cap \overline{ab} = \emptyset$.

   (b) Si $m \in \overline{oa}$ y $b \in \overline{on}$, probar que $\overline{mn} \cap \overline{ab}$ consta de un único punto interior al ángulo.

7. Sea $\triangle abc$ un triángulo, y sea $\overrightarrow{ap}$ una semirrecta interior al ángulo $\angle bac$. Probar que $\overrightarrow{ap}$ corta a $\overline{bc}$ en un único punto.

8. Sea $\triangle abc$ un triángulo y $p \in \overline{ab}$, $q \in \overline{bc}$ y $t \in \overline{ca}$. Probar que el triángulo $\triangle ptq$ está dentro del sector triangular de $\triangle abc$. (Probar primero que p, t y q no están alineados)

9. Probar que todo triángulo es siempre un polígono convexo.

10. Dado un polígono convexo P, probar que su interior es la intersección de los interiores de todos los ángulos interiores del polígono.

11. Dado un polígono convexo P y una recta A de π, probar que A no puede intersecar a P en tres o más puntos. Más aún, si A pasa por un punto interior de P entonces A corta a P en exactamente en dos puntos.

12. Probar que las dos diagonales de un cuadrilátero convexo se cortan en un único punto, y que éste es interior al cuadrilátero.

13. Demuestre que las rectas que contienen a dos lados no consecutivos de un polígono convexo o bien no se intersecan, o bien se cortan en un punto exterior al polígono.

14. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ puntos distintos de π tales que ninguna terna de ellos esté alineada. Supongamos además que dos segmentos $\overline{a_i a_{i+1}}$, $\overline{a_j a_{j+1}}$ tienen intersección vacía o se cortan en uno de sus extremos. Llamaremos **polígono simple** a la unión de todos los segmentos $\overline{a_i a_{i+1}}$ con $i = 0, \ldots, n-1$ (donde $a_0 = a_n$).

    Comparar esta definición con la de polígono convexo y comprobar que si bien todo polígono convexo es simple, no todo polígono simple es convexo. Estudiar cuál es el interior de un polígono simple e intentar dar una definición de éste. Notar que éste no es necesariamente un conjunto convexo.