GEOMETRÍA I - Práctico 3 - 2004

0. Sean A_1 y A_2 semirectas de una recta A tales que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Probar que $A_1 \cup A_2 = A$ ó $A_1 \cup A_2$ es una semirecta.

1. Sea T una transformación rígida y A y B subconjuntos de π. Probar que:
   (a) $T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)$.
   (b) $T(A \cap B) = T(A) \cap T(B)$.
   (c) T lleva segmentos en segmentos, ángulos en ángulos y conjuntos convexos en conjuntos convexos.

2. Probar que los siguientes dos axiomas son equivalentes:

   Las transfomaciones rígidasdel plano son transformaciones biyectivas del plano en sí mismo que satisfacen:

   A1. transforman rectas en rectas, y semirrectas en semirrectas;
   A2. si a, b y c son tres puntos alineados, y c está entre a y b; entonces sus imágenes a', b' y c' por una transformación rígida están alineados, y c' está entre a' y b'.

3. Sea T una transformación rígida.
   (a) Probar que si $T(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{rs}$, entonces $T(p) = r$.
   (b) Probar que si $T(\overline{ab}) = \overline{cd}$, entonces $T(a) = c$ y $T(b) = d$, o bien $T(a) = d$ y $T(b) = c$.

4. Sea T una transformación rígida. Investigar la cantidad de puntos de los cuales habría que conocer sus transformados para poder conocer totalmente a T.

5. Sea T una transformación rígida y sean a, b puntos que quedan fijos por T. Probar que existen infinitos puntos que quedan fijos por T.

6. Sea T una transformación rígida y p un punto fijo por T. Demostrar que existen infinitos conjuntos *estables* (o lo mismo, *invariantes*) por T. (Notar que **no** es lo mismo decir que un conjunto queda estable por T que decir que todos sus puntos quedan fijos por T, a no ser que el conjunto conste de un sólo punto).

7. Probar que la congruencia es una relación de equivalencia. (Ayuda: pensar en la estructura de grupo que tienen las transformaciones rígidas).

8. Dado un subconjunto A del plano π, probar que el conjunto de las tranformaciones rígidas T que satisfacen $T(A) = A$ forman un subgrupo del grupo $\mathbf{G}$ de todas las transformaciones rígidas.

9. Dados a y b puntos de π, determinar el subgrupo de las $T \in \mathbf{G}$ que satisfacen
   (a) $T(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{ab}$;
   (b) $T(\overline{ab}) = \overline{ab}$.

   En cada caso hacer la tabla de multiplicar y observar si son subgrupos abelianos o no.

10. Sea $o, a, b \in \pi$ y sea $\mathcal{C}_o(\overline{ab}) = \{x \in \pi : \overline{ox} \equiv \overline{ab}\}$
    (a) probar que $\mathcal{C}_o(\overline{ab})$ tiene una cantidad infinita de puntos,
    (b) probar que hay infinitas transformaciones rígidas que dejan estable $\mathcal{C}_o(\overline{ab})$.