GEOMETRÍA I - 2004
Práctico 7

1. (a) Sea $\angle aob$ un ángulo y p en el interior de él. Sea x el pie de la perpendicular por p a la recta $\overleftrightarrow{oa}$ e y el pie de la perpendicular por p a la recta $\overleftrightarrow{ob}$. Probar que o bien x está en $\overrightarrow{oa}$, o bien y está en $\overrightarrow{ob}$.

   (b) Sea $\angle aob$ un ángulo y p en la bisectriz, probar que x está en $\overrightarrow{oa}$ e y está en $\overrightarrow{ob}$.

2. Construir un triángulo isósceles conociendo la altura correspondiente a su base, y el ángulo que forman sus lados congruentes. ¿Es posible construir varios triángulos no congruentes entre sí?

3. Dadas tres rectas concurrentes a un mismo punto, construir un triángulo cuyas mediatrices sean esas rectas. ¿Es posible construir varios triángulos no congruentes entre sí?

4. Sea $\angle aob$ un ángulo espejado y supongamos que desde el interior arrojamos un rayo de luz hacia un lado del ángulo (en dirección al vértice). Estudiar que sucede con el rayo a medida que rebota sucesivamente.

5. Justificar porqué el cuarto criterio de congruencia no se puede enunciar tomando la congruencia de los ángulos opuestos a los lados menores.

6. Enunciar los criterios de congruencia para triángulos rectángulos.

7. Calcular el grupo de simetrías de un paralelogramo.

8. Probar que en todo paralelogramo la base media con respecto a un par de lados pasa por el centro de simetría del paralelogramo.

9. Sea $\angle aob$ un ángulo y p un punto interior a $\angle aob$. Probar que existe una recta en H_p que interseca a $\overrightarrow{oa}$ en un punto c y a $\overrightarrow{ob}$ en un punto d, de modo tal que p es el punto medio de $\overline{cd}$.

10. *Teorema de Varignon:* Dado un cuadrilátero arbitrario, los cuatro puntos medios de sus lados forman un paralelogramo.

11. Probar que las rectas que contienen las alturas de un triángulo se cortan en un punto.

12. Una figura F se dice acotada si existe un segmento $\overline{ab}$ tal que para todo par x, y en F se cumple que $\overline{ab}$ es mayor que $\overline{xy}$.

    Probar que una figura acotada no puede tener dos o más centros de simetría, y por lo tanto cualquier polígono (convexo o no) tiene a lo sumo un centro de simetría.

    [Ayuda: Usar el problema 12 del Práctico 5.]

13. Probar que un cuadrilátero convexo es trapecio si y sólo si una de las dos bases medias es congruente a la semisuma de las respectivas bases.

14. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias de centros o_1 y o_2 respectivamente, las cuales se intersecan en a y en b. Probar que $\overleftrightarrow{ab}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{o_1o_2}$, y que $\angle ao_1o_2 \equiv \angle bo_1o_2$.

Continuación del Práctico 7 (Geometría I - 2004)

15. Dados puntos a, b, c, d y rectas secantes E, F en el plano π, **construir con regla y compás**:
    (a) un cuadrado de lado congruente a $\overline{ab}$;
    (b) un rectángulo de lados congruentes a $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ respectivamente;
    (c) un paralelogramo de lados congruentes a $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ respectivamente, tales que uno de ellos esté sobre E y otro sobre F;
    (d) un romboide de lados congruentes a $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ tales que uno de ellos esté sobre E y otro sobre F.

16. Demostrar que las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice son semirectas opuestas, y que las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares.

17. Demostrar que un paralelogramo cuyas diagonales son congruentes es un rectángulo.

18. Demostrar que un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos interiores son congruentes es un rectángulo.

19. Demostrar que todo segmento contenido en una región triangular es menor o igual que su lado mayor.

    Notar que esto prueba que el *diámetro* de un triángulo y de su sector triangular es igual al lado mayor del triángulo.

    ¿Cuál es el diámetro de un cuadrado?

    ¿Y el de un paralelogramo? ¿Y el de un romboide?

20. **Cuadriláteros de Saccheri.** Supongamos que queremos construir un rectángulo, pero que no podemos usar el axioma (IV) de las paralelas, ni ninguna de sus consecuencias. Partimos de un segmento 'base' $\overline{ab}$. Trazamos dos perpendiculares a $\overline{ab}$, una por a (R_a) y la otra por b (R_b). Tomamos un punto cualquiera, digamos c, en una de estas rectas, supongamos en R_b; y entonces tomamos el punto d en R_a tal que $\overline{ad} \equiv \overline{cb}$ y d está en el mismo semiplano que c con respecto a $\overleftrightarrow{ab}$. Ahora miremos el cuadrilátero $abcd$ contruido.

    (i) ¿Es $abcd$ un rectángulo?

    Es un hecho notable el que **no se puede** probar que $abcd$ es un rectángulo sin usar el axioma de las paralelas. Hay una rica historia, de siglos de grandes investigaciones, detrás de este hecho y del 'axioma de las paralelas'.

De este modo, se define *cuadrilátero de Saccheri* como un cuadrilátero convexo $pqrs$ con las propiedades que $\angle spq$ y $\angle pqr$ son ángulos rectos y $\overline{sp} \equiv \overline{qr}$. Además, al segmento $\overline{pq}$ se lo llama *base inferior* y a $\overline{rs}$ *base superior*.

(ii) Demostrar que si $abcd$ y $a'b'c'd'$ son cuadriláteros de Saccheri cuyas bases inferiores $\overline{ab}$ y $\overline{a'b'}$ son congruentes y $\overline{ad} \equiv \overline{a'd'}$, entonces existe una transformación rígida T tal que $T(a) = a'$, $T(b) = b'$, $T(c) = c'$ y $T(d) = d'$. En particular, los cuadriláteros de Saccheri son congruentes.

(iii) Demostrar que las diagonales y los ángulos de la base superior de un cuadrilátero de Saccheri son respectivamente congruentes.

Ayuda: usar el inciso anterior, aplicado a los cuadriláteros de Saccheri $abcd$ y $badc$. (En verdad, estos dos son el mismo, pero estamos nombrando sus vértices en distinto orden.)

Teorema; En todo cuadrilátero de Saccheri la base superior es mayor o congruente a la base inferior.

Nuevamente, remarcamos que sin usar el axioma de las paralelas, no se puede probar que las base superior e inferior son congruentes.

(iv) Usando el axioma de las paralelas, demostrar que todo cuadrilátero de Saccheri es un rectángulo.

21. Probar la equivalencia entre los siguientes cuatro 'axiomas':

    (a) Dada una recta y un punto exterior a ella, existe un única paralela a dicha recta que pasa por el punto dado.

    (b) El paralelismo es relación de equivalencia.

    (c) Si una recta es secante a otra, lo es a todas sus paralelas.

    (d) Dados tres segmentos A, B y C tales que C es secante a A y a B en puntos distintos. Si la suma de un par de ángulos conjugados internos es menor que dos rectos, entonces las prolongaciones de A y B se intersecan en el semiplano determinado por la prolongación de C donde están los ángulos conjugados considerados.

22. Mostrar con dibujos cómo falla cualquiera de los tres 'axiomas' del ejercicio anterior en el *plano hiperbólico*. Un modelo del plano hiperbólico está dado por el 'semiplano superior' $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : y > 0\}$, donde las 'rectas' son las semicircunferencias con centro en el eje x y las semirectas (abiertas) verticales con origen en el eje x. Ver el dibujo orientativo.

.