GEOMETRÍA I - 2004
Práctico 10 - Problemas adicionales

1. Probar que la composición de una simetría axial S_A y una simetría central S_o, con $o \notin A$, es una reflexión deslizante.

2. Probar que toda transformación rígida positiva es la composición de una cantidad par de reflexiones y toda negativa la de una cantidad impar de reflexiones.

3. Sea $abcd$ un cuadrado y p un punto exterior a él. Para cada $x \in abcd$ sean x_1 y x_2 los dos puntos del plano que cumplen que $\triangle xpx_i$ es equilátero. Describir el lugar geométrico de los puntos x_i a medida que se mueve $x \in abcd$.

4. Demostrar que los tres segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero convexo y los de sus diagonales concurren en el punto medio de los tres.

5. * Sobre los lados de un triángulo $\triangle abc$ se construyen 3 triángulos equiláteros, $\triangle abc'$, $\triangle a'bc$ y $\triangle ab'c$ hacia el exterior de $\triangle abc$. Probar que $\overline{aa'} \equiv \overline{bb'} \equiv \overline{cc'}$.

6. * Dados dos triángulos rectángulos isósceles con el vértice recto en común, probar que si se unen los otros dos vértices de modo que se crucen, entonces lo hacen perpendicularmente.

7. Sea F una figura cualquiera del plano π, y consideremos el subgrupo de $\mathbf{G}$ $H := \{T \in G : T(F) = F\}$. Supongamos que H es finito, y además, que H tiene al menos una transformación rígida negativa (i.e., existe $N \in H$ tal que $N < 0$).
   (a) Sea $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ el conjunto de todas las transformaciones rígidas positivas en H (donde $T_i \neq T_j$ si $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$). Probar que, si $N \in H$ entonces $N \circ T_i \neq N \circ T_j$ para todo $i \neq j$.
   (b) Probar que si $N, S \in H$, ambas negativas, entonces $N^{-1} \circ S$ es positiva y está en H.
   (c) Sean $N, S \in H$, ambas negativas. Probar que existe un número natural k, $1 \leq k \leq n$, tal que $S = N \circ T_k$.
   (d) Probar que $H = \{T_1, T_2, \ldots, T_n, N \circ T_1, N \circ T_2, \ldots, N \circ T_n\}$, y que el cardinal de H es $2n$.
   (e) Supongamos ahora que sabemos que una figura B del plano tiene exactamente 17 simetrías positivas. ¿Cuántas simetrías puede tener en total?

8. (a) **(difícil)* Construya un pentágono con regla y compás conociendo los puntos medios de sus lados.
   (b) Igual que en (a) pero conociendo los vértices de los triángulos equiláteros externos sobre las cada uno de los lados del pentágono.

9. En una mesa de billar rectangular una bola sale del punto a y luego de rebotar en las cuatro bandas vuelve a su sitio de origen. Probar que la suma de los segementos recorridos por la bola es igual al doble del segmento diagonal de la mesa (y por lo tanto no depende de la posición de la bola). Probar además que si sigue andando volverá a pasar por a hasta que se la detenga.