GEOMETRÍA II - Segundo Parcial - 20/5/2005

1. Dado un cuadrilátero convexo, formamos dos paralelogramos:

   Uno se obtiene uniendo los puntos medios consecutivos de los lados del cuadrilátero (una demostración de que esto es realmente un paralelogramo se hace usando bases medias de triángulos formados con una diagonal y dos lados del cuadrilátero).

   El otro paralelogramo se obtiene trazando por los extremos de cada diagonal del cuadrilátero paralelas a la otra diagonal.

   Demostrar que estos dos paralelogramos son homotéticos y determinar el centro y la razón de la homotecia.

2. (i) Sea p un punto interior a un triángulo equilátero $\triangle abc$. Probar que la suma de las tres alturas desde p a los lados del triángulo es constante (es decir, no depende de p). ¿Cuánto vale esta constante?

   [Ayuda: considerar las áreas de $\triangle abc$ y de los tres triangulitos que se forman con p.]

   (ii) Sea q un punto interior a un hexágono regular. Se une q con cada vértice del hexágono, determinando así 6 triángulos, que se colorean alternativamente de azul y amarillo. Probar que la suma de las áreas de los 3 triángulos azules coincide con la suma de las áreas de los 3 triángulos amarillos.

3. Sea π un plano que contiene una recta A y un punto b que no pertenece a A. Sea B una recta paralela a A que pasa por b. Probar que B está contenida en π.

4. Sean α y β dos planos paralelos y distintos y sean dos rectas A y B alabeadas tales que $A \subseteq \alpha$ y $B \subseteq \beta$.

   Probar que siempre existen puntos $a \in A$ y $b \in B$ tales que la recta $\overleftrightarrow{ab}$ es perpendicular a A y a B.

   [Aclaración: en este problema se usa el axioma de paralelismo y/o sus consecuencias. En particular, se pueden usar todos los ejercicios del Práctico 6.]

   [Ayuda: construir un plano ω que contenga a A y sea perpendicular a α. Considerar la intersección de ω con β, y con B, y de aquí proponer el b del enunciado.]