GEOMETRÍA II - Año 2005
Práctico 1

0. Dados tres puntos p, q y r en una recta A, y sistemas de abscisas en A tales que la abscisa de p es cero, probar que la proporción
$$\frac{\text{abs}(r)}{\text{abs}(q)}$$
es constante (i.e., no varía al variar el sistema de abscisas elegido).

   Definición: dado un escalar $\lambda \in \mathbf{R}$ y un vector $\overrightarrow{v} = (p, q)$, se define el producto $\lambda \overrightarrow{v}$ como el vector (p, r) con $r \in \overleftrightarrow{pq}$ el único punto que satisface $\text{abs}(r) = \lambda \text{abs}(q)$.

   Notar que, por el Ejercicio anterior, la definión no depende del sistema de abscisas elegido en $\overleftrightarrow{pq}$.

1. Sean $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ vectores con origen o, $\lambda \in \mathbf{R}$, y T una transformación rígida que lleva o en o'. Demostrar que
$T(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = T(\overrightarrow{v_1}) + T(\overrightarrow{v_2})$ y $T(\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda T(\overrightarrow{v})$,
donde si $\overrightarrow{v} = (o, q)$ entonces $T(\overrightarrow{v})$ es el vector de origen o' y extremo $T(q)$.

2. Dados vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ de origen común o, y $\lambda \in \mathbf{R}$, demostrar las siguientes propiedades:

   (a) $\text{long}(\overrightarrow{v}) = 0 \iff \overrightarrow{v}$ es el vector nulo.
   (b) $\text{long}(\lambda \overrightarrow{v}) = |\lambda| \, \text{long}(\overrightarrow{v})$.
   (c) Si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ entonces $\text{long}(\overrightarrow{v}) \leq \text{long}(\overrightarrow{u}) + \text{long}(\overrightarrow{w})$.

3. Recordemos que la distancia entre dos puntos del plano se define como la longitud del segmento que une dichos puntos. Demostrar las siguientes tres propiedades que caracterizan a la función distancia. Para todo $p, q, r \in \pi$:

   (a) $d(p, q) \geq 0$ y $d(p, q) = 0 \iff p = q$;
   (b) $d(p, q) = d(q, p)$;
   (c) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$.

4. Sea A una recta y ρ un sistema de abscisas sobre A asociado al vector (o, u), donde $\overline{ou} \equiv \mathcal{U}$, siendo $\mathcal{U}$ el segmento unitario.

   Dado $\overline{ab}$ definimos 'lon' como $\text{lon}(\overline{ab}) = \rho(T(b))$, donde T es una transformación rígida tal que $T(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{ou}$.

   (a) Probar que 'lon' no depende de A; es decir, si A' es otra recta y ρ' un sistema de abscisas sobre A' asociado a un vector (o', u') tal que $\overline{o'u'} \equiv \mathcal{U}$ y T' es una transformación rígida tal que $T'\left(\overrightarrow{ab}\right) = \overrightarrow{o'u'}$, entonces $\rho(T(b)) = \rho'(T'(b))$.

   (b) Probar que $\text{lon}(\overline{ab}) = |\overline{ab}|$.