GEOMETRÍA II - Año 2005
Práctico 3

0. Probar que los segmentos $\overline{ap}$ y $\overline{bp}$ son congruentes, donde a y b son los puntos de tangencia de las dos rectas tangentes a una circunferencia $\mathcal{C}$ por un punto exterior p exterior a ella.

1. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos circunferencias concéntricas con $r < r'$. Probar que todas las tangentes a $\mathcal{C}$ determinan en $\mathcal{C}'$ cuerdas congruentes.

2. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia y $a \in \mathcal{C}$. Determinar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas que contienen a a.

3. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ circunferencias secantes de centros o y o' respectivamente. Probar que si $p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$. entonces p no está en la recta $\overleftrightarrow{oo'}$.

4. a) Demostrar que las transformaciones rígidas llevan arcos en arcos y extremos (de arco) en extremos (de arco).
   b) Demostrar que en todo arco hay un único *punto medio*, i.e., para todo arco de extremos a, b, existe un único punto $m \in \overset{\frown}{ab}$ tal que los arcos $\overset{\frown}{am}$ y $\overset{\frown}{mb}$ son congruentes.

5. Demostrar que dos arcos en una misma semicircunferencia son congruentes si y sólo si las cuerdas correspondientes son congruentes, y también, si y sólo si, sus ángulos centrales correspondientes son congruentes.

6. Dados una recta R, una circunferencia $\mathcal{C}$, y dos puntos a, b tales que $a, b \in \mathcal{C}$, $a, b \notin R$, probar que si a y b están en semiplanos opuestos con respecto a R entonces el arco $\overset{\frown}{ab}$ corta a R.

7. Sean $a, b, c \in \mathcal{C}_o(r)$ y m, n los puntos medios, respectivamente, de los arcos $\overset{\frown}{ac}$ y $\overset{\frown}{cb}$ contenidos en $\overset{\frown}{ab}$, cuyo punto medio es p. Demostrar que $\angle aom + \angle bon = \angle aop$.

8. (i) Sea $\angle apb$ un ángulo inscripto en una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro o, con $a, b, p \in \mathcal{C}$. Demostrar que el *arco abarcado* por $\angle apb$ es igual al arco de extremos a, b que no contiene al punto p.
   (ii) Ahora tomamos el ángulo central $\angle aob$ en lugar del ángulo inscripto $\angle apb$. Demostrar que el arco abarcado por $\angle aob$ es igual al arco de extremos a, b contenido en el semiplano $\check{\overleftrightarrow{ab}}_o$, i.e. es igual a $\mathcal{C} \cap \check{\overleftrightarrow{ab}}_o$.

9. Demostrar que un ángulo semi-inscripto en una circunferencia es congruente a la 'mitad' del "ángulo central" correspondiente, i.e., es congruente a $\angle bom$, donde o es el centro de la circunferencia, b la intersección del lado del ángulo no tangente con la circunferencia, y m el punto medio del arco abarcado por dicho ángulo.

10. Dadas dos circunferencias disjuntas exteriores, probar que hay exactamente dos tangentes interiores a ambas.

11. Dados un segmento $\overline{pq}$ y un ángulo $\angle AB$, construir con regla y compás el arco capaz correspondiente.

12. (a) Probar que un ángulo interior a una circunferencia (i.e. cuyo vértice es interior) mide la semisuma de los arcos que abarca (él y su opuesto por el vértice).

(b) Enunciar y probar un análogo a la parte (a) para ángulos exteriores (i.e. con vértice exterior y que cortan a la circunferencia).

13. * Dada una recta R en π y puntos a, b en un mismo semiplano con respecto a R, probar que existe al menos una (casi siempre dos) circunferencia tangente a R que pasa por a y b.

14. * Sean A y B dos rectas secantes y sean $x, y \in A$. Determinar $z \in B$ de modo que el ángulo $\angle xzy$ sea lo mayor posible.

15. (a) Probar que un cuadrilátero es inscriptible si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es la misma.
    (b) Probar que un cuadrilátero es circunscriptible si y sólo si la suma de los lados opuestos es la misma.

16. Si un rectángulo es doblado a la mitad y el resultante es semejante al primero, ¿qué puede decir de éste rectángulo?

17. Si dentro de un rectángulo se construye un cuadrado cuya base es el ancho y el rectángulo sobrante es semejante al original ¿qué puede decir de dicho rectángulo?

18. Determinar la proporción entre el lado de un pentágono regular y su diagonal.

19. Sobre una circunferencia están ubicados los puntos m, b y h que son respectivamente mediana, bisectriz y altura trazados desde el vértice de un triángulo inscripto en la circunferencia. Construir con regla y compás dicho triángulo.

20. **Definición:** un número real x se dice *construible* si en el plano π (munido con un segmento unidad $\mathcal{U}$) se puede construir con regla y compás un segmento de longitud igual a x.

    (a) Probar que son construibles los números: 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
    (b) Probar que si t y s son construibles, entonces $t + s$ lo es y ts también.
    (c) Probar que todos los números racionales son construibles.
    (d) Probar que los números construibles forman un cuerpo, que es un subcuerpo de los números reales.