GEOMETRÍA II - Año 2005
Práctico 5

(Ejercicio 0. del Práctico 4.) Sean $a \neq b$, y sean $b' = H_{a,2}(b)$ y $b'' = H_{a,3}(b)$. Además, sea $\tilde{b}$ el punto tal que $2(b, b') = (b, \tilde{b})$. Probar que $\tilde{b} = b''$.

1. Demostrar que el área de un polígono circunscripto a una circunferencia es igual a la mitad del producto del perímetro por el radio de la circunferencia.

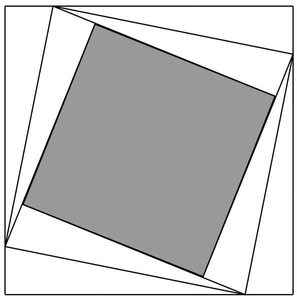
2. Expresar el área del rombo y del romboide en términos de sus diagonales.

3. Demostrar que cualquier mediana de un triángulo separa al mismo en dos regiones que tienen áreas iguales.

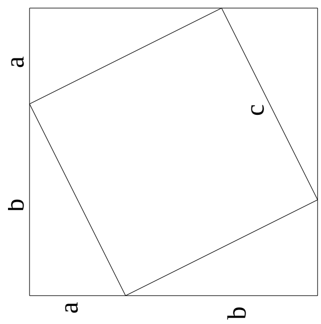
4. Dividir un paralelogramo en tres partes de igual área, mediante paralelas a una diagonal.

5. Determinar el rectángulo de mayor área inscripto en un triángulo.

6. Doblar las puntas de un cuadrado de papel en la forma que indica la figura, de tal modo que el cuadrado que queda en el centro tenga por área 1/4 del área del cuadrado dado. ¿Cómo se logra esto? ¿Qué valores son posibles para el área del cuadrado sombreado?



7. A partir de la figura y usando lo que se sabe sobre las áreas de los triángulos y cuadrados, demostrar el Teorema de Pitágoras.



8. El radio de la rueda delantera de un triciclo mide 15cm y el de las ruedas traseras mide 8cm. El brazo del pedal a la rueda mide 8cm. ¿Qué longitud de arco recorre el pedal cuando las ruedas traseras dan una vuelta?

9. Dado el cuadrilátero convexo $ABCD$ y el punto medio E de la diagonal AC, calcular el área del cuadrilátero $ABED$ en función del área de $ABCD$.

10. Si E y F son los puntos medios de los lados AB y BC del cuadrilátero convexo $ABCD$, calcular el área del cuadrilátero $EBFD$ en función del área de $ABCD$.

11. En el hexágono inscriptible $ABCDEF$ las diagonales AD, BE y CF son diámetros de la circunferencia circunscripta. Probar que el área del hexágono es igual al doble del área del triángulo $\triangle ACE$.

12. En un trapecio $ABCD$, donde las diagonales se cortan en un punto O, los triángulos $\triangle AOD$ y $\triangle BCO$ tienen igual área.

    Vale la recíproca. I.e., si en un cuadrilátero $ABCD$, cuyas diagonales se cortan en un punto O, los triángulos $\triangle AOD$ y $\triangle BCO$ tienen la misma área, entonces el cuadrilátero es un trapecio.

En los siguientes problemas, a donde diga "hallar" o "trazar" significará **"construir con regla y compás"**.

13. (a) Dado un polígono convexo $ABCDE$, hallar un cuadrilátero $ABCD'$ que tenga la misma área.
    (b) Ahora hallar un triángulo $AB'D'$ que tenga la misma área.
    (c) Notar que esto se puede generalizar comenzando con un polígono convexo de n lados (hasta llegar a un triángulo con la misma área).

14. Dado un cuadrilátero convexo $ABCD$, trazar desde un vértice una recta que lo divida en dos partes de igual área.

15. * Dado un cuadrilátero convexo $ABCD$, hallar un punto interior P de modo que los segmentos determinados por P y los puntos medios de los lados del cuadrilátero descompongan a éste en 4 regiones de igual área.

    Ayuda: tomar T y R los puntos medios de las diagonales, trazar las paralelas a dichas diagonales que pasan por T y R y la interseccion será el punto P buscado.

16. Dado el triángulo $\triangle ABC$, rectángulo en B, y el cuadrado $BGHC$ sobre uno de sus catetos, construimos sobre la hipotenusa un rectángulo de igual área que el cuadrado: sea $CDEF$ el rectángulo con $CD \equiv AC$, $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ es la parelela a $\overleftrightarrow{CD}$ que pasa por B. Probar que realmente el área de $CDEF$ es igual a la de $BGHC$.

    Ayuda: considerar los triángulos CDF, BCD, HCA y HCB.

17. Construir un cuadrado de igual área que un rectángulo dado.

    Ayuda: hacer uso de la construcción del problema anterior.