GEOMETRÍA II - Año 2005
Práctico 6

1. Enunciar todos los axiomas referentes al espacio vistos hasta ahora.
2. Revisar el hecho que para todo plano $\pi \subset \mathbf{E}$ se verifican los axiomas de ordenación e incidencia del plano vistos en Geometría I.
3. Si dos segmentos A y B (del espacio) están contenidos en un plano α y son congruentes (como segmentos del espacio), entonces son congruentes como segmentos en el plano α.
4. Dado un plano $\pi \subset \mathbf{E}$, demostrar que existe en $\mathbf{E}$ una recta A tal que $A \cap \pi = \emptyset$. Entonces, una recta y un plano no secantes son tales que la recta está contenida en el plano o su intersección es vacía. En estos casos, la recta y el plano se llaman *paralelos*.
5. Probar que existen rectas que no son coplanares. ¿Cómo se llaman tales rectas?
6. Probar que en el espacio hay infinitos semiespacios distintos.
7. (*Los semiespacios cerrados son convexos.*) Sea A una semirecta con origen en el semiplano π. Probar que A está contenida en un semiespacio determinado por π.
8. Si α es un semiplano con borde contenido en el plano π, entonces α está contenido en un semiespacio determinado por π.
9. (a) Sea γ un semiplano interior al ángulo diedro $\angle\alpha\beta$. Probar que los puntos de γ son interiores a $\angle\alpha\beta$.
   (b) Probar que un plano δ con borde igual a $\alpha \cap \beta$ es interior a $\angle\alpha\beta$ si, y solamente si, δ corta a $\overline{ab}$ para todo par de puntos $a \in \alpha$, $b \in \beta$, ambos no pertenecientes a la arista o borde de $\angle\alpha\beta$.
10. Dados un punto $p \in \mathbf{E}$ y dos rectas paralelas A y B, describir en qué casos exactamente existe una recta a la que p pertenezca y que sea secante a las rectas A y B.
11. Idem al ejercicio anterior, pero para A y B secantes.
12. Idem al ejercicio anterior, pero para A y B alabeadas.
13. Probar que toda transformación rígida del espacio lleva rectas en rectas y semirectas en semirectas.
14. Probar que las transformaciones rígidas del espacio llevan el borde de un semiplano en el borde del semiplano transformado.

15. Sea T una transformación rígida del espacio E y sea F un subconjunto de E.

    Demostrar que si A es una semirecta, π un semiplano y E_1 un semiespacio, entonces

    $T(\check{A}) = \overset{\vee}{T(A)}$;

    $T(\check{\pi}) = \overset{\vee}{T(\pi)}$ y

    $T(\check{E}_1) = \overset{\vee}{T(E_1)}$

    donde $\check{}$ y $\vee$ denotan '*opuesto*'.

16. Si A y B son rectas alabeadas, ¿existirá otra recta C alabeada con A y B simultáneamente?

17. Sean π y ω planos paralelos y sea A una recta secante a π.

    Probar que A es secante a ω.

18. Si A es la recta de puntos que equidista de los puntos no alineados a, b y c, entonces A es perpendicular al plano generado por dichos puntos (i.e., $A \perp \mathrm{pl}(a, b, c)$).

19. Sean A, B y C rectas y π, α y β planos en el espacio E. Probar que

    (a) $A \,||\, B$ y $A \perp \pi \implies B \perp \pi$.
    Recíprocamente, $A \perp \pi$ y $B \perp \pi \implies A \,||\, B$.

    (b) $A \perp B$ y $B \perp C$ no implican $A||C$.

    (c) $\pi \perp \alpha$ y $\alpha \,||\, \beta \implies \pi \perp \beta$.

    (d) $\pi \perp \alpha$ y $\alpha \perp \beta$ no implican $\pi \,||\, \beta$.

20. Dados un punto p y una recta A que no contiene a p, encontrar todos los puntos del espacio que sean pie de una perpendicular por p a un plano que contiene a A.

21. (a) Probar que, dado un plano π, el conjunto de transformaciones rígidas G_π que lo dejan fijo es, con la composición, un subgrupo de $\mathbf{G}$, el grupo de las transformaciones rígidas del espacio.

    (b) Consideremos, para los elementos de G_π, la siguiente relación:

    $$T \sim S \quad \text{si} \quad T_{|\pi} = S_{|\pi}.$$

    ¿Cuántos elementos hay en cada clase de equivalencia? Describir los elementos de cada clase.

    Comentario. $G_\pi / \sim$ con la composición inducida en el cociente, es isomorfo al grupo de transformaciones rígidas del plano π en sí mismo.