GEOMETRÍA II - Año 2005
Práctico 8

1. Probar que la intersección de un ángulo poliédrico con un plano que interseca a cada arista en un punto distinto del origen de la misma es un polígono convexo.

2. Calcular el número de pentágonos y de hexágonos que componen una pelota de fútbol. ¿Cuál es el nombre que tiene este poliedro? Dar también el número de vértices y el de aristas.

3. Lo mismo que el ejercicio anterior para el número de triángulos y cuadrados que componen el rombicuboctaedro.

4. Calcular el número de caras de cada tipo en un poliedro semiregular, que resulta de "truncar" los ángulos de los vértices de un poliedro regular con planos convenientes (que no pasen por los puntos medios de las arista), de modo que cada cara resulte un polígono regular.

5. ¿Qué tipo de transformación rígida del plano es la restricción de una simetría axial $S_A|_\pi$ a un plano π perpendicular a A? Justificar.

6. Probar que toda recta B perpendicular alabeada al eje de una simetría axial, tiene por simétrica una paralela a ella.

7. Encontrar y dar las características de las transformaciones rígidas resultantes de las siguientes composiciones:

   (a) $S_\pi \circ S_\omega$ donde $\pi \perp \omega$.
   (b) $S_A \circ S_\pi$ donde $A \perp \pi$.
   (c) $S_A \circ S_B$ donde $A \perp B$.
   (d) $S_A \circ S_\pi$ donde $A \subset \pi$.
   (e) $S_A \circ S_p$ donde $p \in A$.
   (f) $S_\pi \circ S_p$ donde $p \in \pi$.

   Ayuda: Las resultantes son todas distintos tipos de simetrías, axiales, centrales o especulares.

8. Probar que si una figura tiene eje de simetría A y un plano de simetría π, entonces $A' = S_\pi(A)$ es también eje de simetría de la figura. [Ayuda: usar el Ejercicio 15.]

9. Demostrar que la composición de tres simetrías centrales con los centros no colineales es otra simetría central cuyo centro determina un paralelogramo con los otros tres.

10. Encontrar y dar las características de la transformación rígida resultante en el ejercicio anterior si los tres puntos están alineados.

11. ¿Es el conjunto

$$\{L_{(a,b)} : \overleftrightarrow{ab} \;||\, \pi\} \cup \{S_A : A \perp \pi\}$$

un subgrupo de transformaciones rígidas? En caso de serlo, ¿es abeliano?

12. Dados cuatro puntos a, b, c, d no coplanares en el espacio, sean a', b', c', d' los puntos medios de $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$ y $\overline{da}$, respectivamente. Demostrar que a', b', c', d' son los vértices de un paralelogramo plano.

13. Dado un subconjunto A del espacio E, probar que el conjunto de las tranformaciones rígidas T que satisfacen $T(A) = A$ forman un subgrupo del grupo $\mathbf{G}$ de todas las transformaciones rígidas del espacio.

14. Sea F una figura cualquiera del espacio E, y consideremos el subgrupo de $\mathbf{G}$, $H := \{T \in G : T(F) = F\}$. Supongamos que H es finito, y además, que H tiene al menos una transformación rígida negativa (i.e., existe $N \in H$ tal que $N < 0$).

    (i) Sea $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ el conjunto de todas las transformaciones rígidas positivas en H (donde $T_i \neq T_j$ si $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$). Probar que, si $N \in H$ entonces $N \circ T_i \neq N \circ T_j$ para todo $i \neq j$.

    (ii) Probar que si $N, S \in H$, ambas negativas, entonces $N^{-1} \circ S$ es positiva y está en H.

    (iii) Sean $N, S \in H$, ambas negativas. Probar que existe un número natural k, $1 \leq k \leq n$, tal que $S = N \circ T_k$.

    (iv) Probar que $H = \{T_1, T_2, \dots, T_n, N \circ T_1, N \circ T_2, \dots, N \circ T_n\}$, y que el cardinal de H es $2n$.

    (v) Supongamos ahora que sabemos que una figura B del espacio tiene exactamente 24 simetrías positivas. ¿Cuántas simetrías puede tener en total?

15. Sea T una transformación rígida del espacio E y sea F un subconjunto de E. Probar que

    (a) $T \circ S_A \circ T^{-1} = S_{T(A)}$, para toda recta A.
    Ayuda para una solución: considerar una tripla (A, α, E_2), donde A es una semirecta, α un semiplano determinado por A y E_2 un semiespacio determinado por α, y aplicar la transformación del miembro izquierdo a esta tripla.

    (b) Si las rectas A y B son ejes de simetría de F, entonces $S_A(B)$ es también eje de simetría de F.

    (c) Si π y ω son planos de simetría de F, y F es un conjunto acotado, entonces $\pi \cap \omega \neq \emptyset$.
    Además, si esta intersección es una recta, entonces dicha recta es eje de rotación de F.

Llamaremos *simetría* de un figura F a las transformaciones rígidas T del espacio que satisfacen $T(F) = F$.

16. Sea T una simetría de un poliedro P. Probar que T lleva vértices (de P) en vértices (de P), aristas en aristas, y caras en caras.

17. Probar que el grupo de simetrías de un poliedro es siempre finito.

18. Sean P un poliedro y T una rotación o una simetría axial que es una simetría de P. Llamemos J al eje de rotación o simetría de T, A a una arista de P y C a una cara de P.

    (i) Probar que si $A \cap J \neq \emptyset$ entonces esta intersección es igual a un sólo punto que es el centro (o punto medio) de A o un extremo de A.

    (ii) Probar que si C es un polígono regular y $A \cap J \neq \emptyset$, entonces esta intersección es igual a un sólo punto que es un "centro"; es decir, es el centro de C, o el centro de una arista de C, o un vértice de C.

19. Hallar los ejes y planos de simetría de los poliedros regulares. Analizar si todos tienen ejes de simetría.

20. Calcular el cardinal (cantidad de elementos) del grupo de simetrías de cada poliedro regular.

21. Probar que los grupos de simetrías positivas del cubo y del octaedro son isomorfos.

22. Hallar el grupo de simetrías del tetraedro.

23. Hallar la cantidad de ejes de rotación que tiene el icosaedro.

24. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar claramente.

    (a) Sea C una circunferencia de centro o y radio R, entonces, para todo $x \in C$, $\overleftrightarrow{ox}$ es mediatriz de cualquier cuerda perpendicular a $\overleftrightarrow{ox}$.

    (b) Si C_1 y C_2 son dos circunferencias secantes entonces T_1 y T_2 son secantes para cualquier recta T_1 tangente a C_1, T_2 tangente a C_2.

    (c) Si un polígono convexo de más de cuatro lados es circunscriptible, entonces es regular.

    (d) Si $\overset{\triangle}{abc}$ y $\overset{\triangle}{a'b'c'}$ son dos triángulos tales que $\overline{ab} \equiv \overline{a'b'}$, $\overline{bc} \equiv \overline{b'c'}$ y $\angle abc$, $\angle a'b'c'$ son complementarios, entonces $\overset{\triangle}{abc}$ y $\overset{\triangle}{a'b'c'}$ tienen la misma área.

    (e) Existe un poliedro convexo formado por 5 triángulos y 7 pentágonos, tal que a cada vértice llegan 5 aristas.