Análisis Matemático II - Primer cuatrimestre de 2016 (recursado)
Preguntas de la teoría para el examen

Observaciones

a) Los ejemplos presentados en la teoría (del tipo de los del práctico) pueden ser incluidos como preguntas en la parte práctica del examen.

b) Una pregunta del examen puede ser sólo una parte de una de las preguntas siguientes.

c) Puede que sea verdadero un enunciado más general que el de la pregunta.

d) Si en esta lista una pregunta tiene sugerencia, también la tendrá si aparece en un examen.

1. Sea f una función acotada definida en el intervalo $[a,b]$. Definir con precisión qué es una partición P de $[a,b]$. Definir $s(f,P)$ y $S(f,P)$. Escribir qué significa que f sea integrable en $[a,b]$, y en ese caso, a qué se llama $\int_a^b f$.

2. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Probar que si para todo $n\in\mathbb{N}$ existe una partición P_n de $[a,b]$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) =: \ell,$$
entonces f es integrable sobre $[a,b]$ y $\int_a^b f = \ell$.

3. Calcular $\int_0^b x\,dx$ recurriendo a las particiones $P_n = \left\{\frac{ib}{n} \mid i=0,\dots,n\right\}$ $(n\in\mathbb{N})$ del intervalo $[0,b]$. Justificar.

4. Sea f una función acotada en el intervalo $[a,b]$ y sean P,Q dos particiones de $[a,b]$. Demostrar lo siguiente.

   a) $s(f,P)\le S(f,P)$.

   b) Si $P\subset Q$, entonces $s(f,P)\le s(f,Q)$.

   c) $s(f,P)\le S(f,Q)$. (Dar por sabida la afirmación análoga a la de (b) para sumas superiores.)

5. Sea f una función acotada en el intervalo $[a,b]$. Probar que f es integrable sobre $[a,b]$ si y sólo si para todo $\varepsilon>0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$.

6. Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$ y sea $c>0$. Demostrar que cf es integrable sobre $[a,b]$ y que $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.

7. Probar que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función integrable que satisface $m\le f(x)\le M$ para todo $x\in[a,b]$, entonces $m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)$.

8. Sea f una función integrable definida en el intervalo $[a,b]$.

   a) Definir el promedio μ de f en $[a,b]$.

   b) Mostrar que si $m \leq f \leq M$, entonces $m \leq \mu \leq M$.

   c) Mostrar que si f es continua, entonces $\mu = f(x_o)$ para algún $x_o \in [a,b]$.

9. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable. Suponiedo que $|f|$ es integrable en $[a,b]$, mostrar que
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \, .$$

10. Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Demostrar que $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_a^x f$, es continua en (a,b).

11. Enunciar y demostrar el Primer Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal.

12. Demostrar la regla de Barrow: Si f es continua en $[a,b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entoces $\int_a^b f = g(b) - g(a)$.

13. Enunciar y demostrar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal.

14. Sea $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ una función con $f(1) = a > 0$. Mostrar que si $f(r+s) = f(r) f(s)$ para todo $r, s \in \mathbb{Q}$, entonces $f(r) = a^r$.

15. Definir con precisión la función $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ y probar que $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ y $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$ para todo $x, y > 0$.

16. Probar que $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$ y que $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$. Mostrar además que $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una biyección creciente.

17. Definir con precisión la función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y probar que $\exp' = \exp$.

18. Probar que para todo par de números reales se cumple que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

19. Definir con precisión el número e y e^x para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que la definición es consistente con la definición de e^r para $r \in \mathbb{Q}$.

20. Sea $a > 0$. Definir con precisión a^x para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que $a^1 = a$ y $a^{x+y} = a^x a^y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Mostrar que la definición es consistente con la definición de a^r para $r \in \mathbb{Q}$.

21. Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Definir con precisión la función $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ y mostrar que $\log_a x = \frac{1}{\log a} \log x$.

22. Definir las funciones senh y cosh. Mostrar que $\cosh^2 - \operatorname{senh}^2 = 1$ y que $\cosh' = \operatorname{senh}$. Definir $\cosh^{-1} : (1,\infty) \to (0,\infty)$ y mostrar que $\left(\cosh^{-1}\right)'(x) = 1/\sqrt{x^2-1}$.

23. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$.

24. Sea $a > 0$. Mostrar que $(a^x)^y = a^{xy}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

25. Sea $b \in \mathbb{R}$ y sea $f : (0, \infty)$ definida por $f(x) = x^b$. Mostrar que $f'(x) = bx^{b-1}$.

26. Mostrar que si dos funciones definidas en un intervalo de la recta real tienen la misma derivada, entonces difieren en una constante.

27. Demostrar la fórmula de sustitución: Si f y g son funciones, f y g' son continuas, entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g)\, g'.$$

28. Mostrar que un polinomio $p(x)$ es divisible por $x - \alpha$ si y sólo si $p(\alpha) = 0$.

29. Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$ para todo $b > a$. Mostrar que si $\lim_{n\to\infty} = L \neq 0$, entonces $\int_a^\infty f(x)\ dx$ diverge.

30. Demostrar el criterio de comparación para integrales impropias: Sean f y g funciones definidas en $[a, \infty)$, integrables en $[a, b]$ para todo $b > a$. Si $0 \leq f \leq g$ y $\int_a^\infty g$ existe, entonces $\int_a^\infty f$ existe.

31. Enunciar con precisión el segundo criterio de comparación para integrales impropias y demostrarlo.

32. Mostrar que $\int_0^1 e^{-t} t^x\, dt$ está bien definida para todo $x > -1$.

33. Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto a tal que existe $f^{(k)}(a)$ para $0 \leq k \leq n$.

    a) Definir el polinomio de Taylor $p_{n,a}$ de f de orden n alrededor de a.

    b) Probar que $p_{n,a}$ es el único polinomio p de grado menor o igual que n que cumple $f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a)$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n$.

34. Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto a tal que existe $f^{(k)}(a)$ para $0 \leq k \leq n$. Probar que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

    Sugerencia: Escribir $p_{n,a}(x) = q(x) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ y aplicar varias veces la regla de L'Hopital, salvo en el último paso.

35. Enunciar un criterio para que a sea un punto de máximo o de mínimo local de una función f, que involucre las derivadas de f de orden superior, y demostrarlo.

36. Encontrar el polinomio de Taylor de la función $f(x) = 1/(1+x^2)$ de orden n en $a = 0$ y verificarlo. Sugerencia: Considerar $y = x^2$ en el producto

$$(1+y)\left(1 - y + y^2 - y^3 + \cdots + (-1)^n y^n\right)$$

y para la verificación usar el siguiente resultado: Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en el punto a. Si P es un polinomio en $x - a$ de grado $\leq n$, igual a f hasta el orden n en a, entonces P coincide con el polinomio de Taylor de f de orden n en a.

37. Sean f y g funciones con derivadas de todos los órdenes en el punto a. Escribir una expresión para el polinomio de Taylor de orden n de la función producto fg en términos de polinomios de Taylor de orden adecuado de las funciones f y g en a. Demostrar la afirmación.

38. Enunciar con precisión el Teorema de Taylor (forma de Lagrange del resto).

39. Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existe, entoces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

40. Sea $r \in \mathbb{R}$ con $|r| < 1$. Probar que la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1/(1-r)$. ¿Cuánto vale $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$?

41. Escribir la definición de que un número x se exprese como $0, a_1 a_2 a_3 \cdots$, donde $a_n \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ para todo n.

42. Criterio del cociente para la convergencia de series. Sea a_n una sucesión tal que $a_n > 0$ para todo n. Probar que si $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

43. Enunciar con precisión el criterio de la integral para la convergencia de series y escribir la idea de la demostración. Mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge.

44. Enunciar con precisión el criterio de Leibniz para la convergencia de series alternadas.

45. a) Escribir la definición de que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converja absolutamente.

    b) Mostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

46. Enunciar con precisión el teorema que describe el conjunto de convergencia de una serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. En particular, escribir la definición de que $R \in [0, \infty]$ sea el radio de convergencia de esa serie de potencias.

47. a) Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto a tal que $f^{(k)}(a)$ existe para todo $k \in \mathbb{N}$. Definir la serie de Taylor de f alrededor de a.

    b) Probar que la función sen coincide con su serie de Taylor alrededor de $a = 0$ en toda la recta real.