Práctico 8

1. Determinar la suma de las siguientes series.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(10^{-n} + 9^{-n}\right).$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3} + 3^n}{6^n}.$

2. Sea $k \in \mathbb{N}$. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converge.

3. Decidir si las siguientes series son convergentes o divergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}.$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^4+7n}.$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{5n^2+1}.$

4. (a) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de enteros tales que $0 \leq a_n \leq 9$. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$$

existe y es un número entre 0 y 1 (que se denota comúnmente por $0, a_1a_2a_3a_4\ldots$).

(b) Escribir cada uno de los números decimales periódicos siguientes como una fracción o como suma de dos fracciones.

(i) $0,2525252525\ldots$ (ii) $0,41283283283283\ldots$

5. Decidir si las siguientes series son convergentes o divergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^4(n)}{n^2}.$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}.$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}.$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}.$

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}.$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}.$ (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n!)}.$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(1/n).$ (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n).$

Sugerencias: En (f) usar el criterio de la integral. En (g) comparar $n!$ con n^n y usar (f). En (j) usar una función lineal menor que sen en $(0, \pi/2)$. Para (k) mostrar que $\operatorname{sen}(n)$ no tiende a cero para $n \to \infty$.

6. Decidir si las siguientes series son convergentes. Justificar.

(a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \cdots$ (b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$

7. Determinar en cada caso si la serie es convergente y si es absolutamente convergente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+2)}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$

8. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es convergente.

(b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ son convergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.

(c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $a_n \geq 0$ para todo n, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente.