Práctico 9

1. Sea a_n una sucesión con $a_n \neq 0$ para todo n. Probar que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R \in [0,\infty],$$

entonces la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

tiene radio de convergencia igual a R. Sugerencia: Para cada x fijo llamar $b_n = a_n (x-a)^n$ y aplicar el criterio del cociente a la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

2. Encontrar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2+1} x^n$. (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-a)^n$. (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n3^{n-1}}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x^n$. (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\log n}(x-a)^n$. (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$.

Sugerencia para (e): Ejercicio 8 (a) del práctico 3.

3. Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x+2)^n$ converge en $x=-6$ y diverge en $x=8$, ¿qué puede decirse de las siguientes series?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n 10^n$. (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n(-5)^n$. (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$.