# PRÁCTICO 1

**Nota:** Los ejercicios con (*) son opcionales.

1. *a*) Sea $u_o \in \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $g(x) = u_o$ para todo $x$. Mostrar que $\mathrm{D}g_x$ es la transformación nula.

   *b*) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal. Mostrar que $\mathrm{D}f_x = f$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

   *c*) Calcular $\mathrm{D}f_x$ para una forma bilineal $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ considerando a $f$ como una función de $\mathbb{R}^{2n}$ en $\mathbb{R}$.

2. *a*) Mostrar que en el plano las transformaciones ortogonales en general no conmutan con las traslaciones.

   *b*) ¿Qué se obtiene de componer la reflexión en el plano respecto del eje x con la reflexión respecto de la recta $\{t(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \mid t \in \mathbb{R}\}$?

   *c*) Dado un vector $u \in \mathbb{R}^2$ y $\theta \in [0, 2\pi]$, demostrar que existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T_u \circ R_\theta = R_\theta \circ T_v$, donde $T_w$ es la traslación en $w$ dada por $T_w(q) = q + w$ y $R_\theta$ es la rotación del plano en ángulo $\theta$ alrededor del origen.

   *d*) Escribir la rotación del plano en ángulo $\pi/3$ alrededor del punto $p_o$ de la forma $T_v \circ O$ y de la forma $O' \circ T_w$, donde $O, O'$ son transformaciones ortogonales.

   *e*) Escribir la rotación del plano en ángulo $\pi/3$ alrededor del punto $p_o$ de la forma $T_v \circ O$ y de la forma $O' \circ T_w$, donde $O, O'$ son transformaciones ortogonales.

3. Probar que $g : \mathbb{R}^n \to R^n$ es una isometría (i.e. preserva la distancia entre dos puntos cualesquiera)si y solo si $g(v) = O.v + b$, donde $O$ es una matriz ortogonal de $\mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^n$. *Sugerencia: reducir al caso $g(0) = 0$ y probar primero que $g$ manda rectas en rectas*

4. Sean $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ funciones diferenciables. Hallar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \langle u(t), v(t) \rangle$ y $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} (u(t) \times v(t))$ en términos de $u, v$ y sus derivadas.

5. *a*) ¿Qué se puede decir de una curva $\alpha$ tal que $\alpha''(t) = 0$ para todo $t$?

   *b*) Hallar una curva $\alpha$ cuya imagen esté contenida en una recta, pero tal que $\alpha''(t) \neq 0$ para todo $t$.

6. Sea $\gamma_a : [0, 2\pi a] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la curva cuya imagen está contenida en el círculo de radio $a$ centrado en el origen parametrizada por longitud de arco.

   *a*) Dibujar en un mismo dibujo las curvas $\gamma_{1/2}$, $\gamma_1$ y $\gamma_4$.

   *b*) Dibujar los campos de velocidades.

   *c*) Calcular $||\gamma''||$, para cada una de las curvas del punto anterior.

7. Considerar el espiral $\alpha(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t)$ con $0 \leq t$.

   a) ¿Cuál es la longitud de 4 vueltas de espiral? ¿Y de todo el espiral?
   b) Reparametrizar $\alpha$ por longitud de arco.

8. Decir si las curvas $\alpha(t) = (\operatorname{sen} 3t \cos t, \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} t)$ y $\beta(t) = (t^3, 2t^3)$ son regulares y dibujar sus trayectorias.

9. Mostrar que la curva $\beta(t) = (t^2, t^3)$ es de clase $C^1$ pero no es regular, y mostrar que su imagen tiene una *esquina*. ¿Cómo se detecta una esquina?

10. *La Catenaria.* Sea $\alpha(t) = (t, \cosh t)$.
    a) Dibujarla.
    b) Mostrar que la curvatura de $\alpha$ es $\kappa(t) = 1/\cosh^2 t$.
    c) ¿En qué punto es máxima la curvatura?

11. *Figura Ocho.* Sea $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t \cos t)$.
    a) Dibujar $\alpha$ e identificar varios puntos.
    b) Hacer un buen gráfico cualitativo de la función curvatura.

12. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva que no pasa por el origen. Si $\alpha(t_0)$ es el punto más cercano al origen y $\alpha'(t_0) \neq 0$, probar que el vector posición $\alpha(t_0)$ es ortogonal al vector $\alpha'(t_0)$ (donde $t_0$ está en el interior del intervalo).

13. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva con $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t$. Probar que $\|\alpha(t)\|$ es constante (es decir, que el gráfico $\alpha(t)$ está contenido en una esfera de centro cero) si y sólo si $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo $t$.

14. (*) Un disco circular de radio 1 en el plano $xy$ rueda a lo largo del eje $x$. La figura que describe un punto fijo de la circunferencia del disco se llama *cicloide* (ver dibujo).
    a) Dar una curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cuya trayectoria sea el cicloide, y determinar sus puntos singulares (i.e. donde su derivada se anula).
    b) Calcular la longitud de arco del cicloide correspondiente a una rotación completa del disco.

Cicloide

15. (*) Sea $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$.
    a) Dibujar la trayectoria de $\alpha$. Esta curva se llama *astroide*. ¿En qué puntos es singular?
    b) Mostrar que dicha curva puede ser obtenida de manera análoga al cicloide del ejercicio anterior, rotando un disco de radio 1/4 con un punto distinguido en su borde, a lo largo de otra curva de manera que resulten siempre tangentes (en el ejercicio anterior esta otra curva era el eje $x$; en este caso, la curva sobre la que hay que rotar es el círculo de radio 1 centrado en el origen). Dibujar la curva que se obtiene al hacer la misma construcción pero con el disco interior de radio 1/3 (*deltoide*). ¿Qué valores del radio interior hacen que la trayectoria resultante sea una curva cerrada?