Práctico 2

Nota: Los ejercicios con (*) son opcionales.

1. Sea α una curva regular con $|\alpha'| = a$, constante. Mostrar que si s es la longitud de arco medida desde algún punto, entonces $s(t) = at + b$ para alguna constante b.

2. Sea $\alpha : I \to \mathbf{R}^2$ una curva plana parametrizada por longitud de arco, y supongamos que $0 \in I$. Una circunferencia de centro p y radio r se llama *circunferencia osculatriz* de α en 0 si es una aproximación de orden dos de α en $t = 0$, o más precisamente, si la función $f(s) = |\alpha(s) - p|^2$ cumple que $f(0) = r^2$ y $f'(0) = f''(0) = 0$. Probar que si $\kappa(0) \neq 0$, entonces la circunferencia de centro $p = \alpha(0) + \frac{1}{\kappa(0)}\mathbf{n}(0)$ y radio $\frac{1}{|\kappa(0)|}$ es la única circunferencia osculatriz de α en $t = 0$.

3. Graficar la curva $\alpha(t) = \frac{e^t}{\sqrt{3}}(\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$. Hallar la reparametrización por longitud de arco $\beta(s)$ con $\beta(0) = \alpha(0)$. Calcular el tiedro de Frenet, la curvatura y la torsión de β.

4. (*) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular (no necesariamente por longitud de arco), sea $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ la reparametrización de $\alpha(t)$ por longitud de arco $s = s(t)$, y sea $t = t(s)$ la función inversa de s. Llamemos $\alpha' = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$, $\alpha'' = \mathrm{d}^2\alpha/\mathrm{d}t^2$, etc. Probar que:

   a) $\mathrm{d}t/\mathrm{d}s = 1/|\alpha'|$, $\mathrm{d}^2t/\mathrm{d}s^2 = -\langle\alpha', \alpha''\rangle/|\alpha'|^4$.

   b) La curvatura de α en $t \in I$ es
   $$\kappa(t) = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}.$$

   c) La torsión de α en $t \in I$ es
   $$\tau(t) = -\frac{\langle\alpha' \times \alpha'', \alpha'''\rangle}{|\alpha' \times \alpha''|^2}$$

   d) Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es una curva plana, su curvatura (con signo) en $t \in I$ viene dada por
   $$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

5. ¿Cambian la curvatura y la torsión de una curva parametrizada por longitud de arco en el espacio si se la recorre en sentido opuesto? Para la curvatura, comparar con el caso de curvas planas.

6. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbf{R}^2$ una curva regular. Suponer que existe $t_0 \in (a, b)$ tal que $|\alpha(t)|$ alcanza el máximo en t_0. Probar que $|\kappa(t_0)| \geq 1/|\alpha(t_0)|$.

7. Considerar la *hélice* circular $\alpha(t) = (a\cos(t), a\operatorname{sen}(t), t)$.

   a) Calcular la longitud de arco.

   b) ¿Se puede reparametrizar por longitud de arco?

   c) Calcular el marco de Frenet y las funciones curvatura y torsión.

d) ¿Cómo cambian la curvatura y la torsión con a?

e) ¿Cómo se puede modificar la curva α para que tenga menor/mayor torsión?

8. Una curva α se llama *hélice* si las rectas tangentes a α forman un ángulo constante con una dirección fija. Asumiendo $\tau(t) \neq 0$ para todo t probar:

   a) α es una hélice sii $\kappa/\tau =$ constante.

   b) α es una hélice sii las rectas que contienen a $n(t)$ y pasan por $\alpha(t)$ son paralelas a un plano fijo.

   c) α es una hélice sii las rectas que contienen a $B(t)$ y pasan por $\alpha(t)$ forman un ángulo constante con una dirección fija.

9. (*) Mostrar que la curva $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ es una hélice.

10. Probar que una curva regular α esta contenida en una recta si y sólo si existe un punto p tal que cada recta tangente a α pasa por p. ¿Qué ocurre si no pedimos como hipótesis que la curva sea regular?

11. (*) Supongamos que todas las rectas normales a una curva parametrizada pasan por un punto fijo. Probar que la traza de la curva está contenida en una circunferencia.

12. Sea $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), 0)$ una curva regular (contenida en el plano $z = 0$) y sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal inyectiva.

    a) Mostrar que la curva $\gamma = T \circ \beta$ es regular.

    b) ¿Cómo son las torsiones de β y γ?

13. Probar que la curva de menor longitud que une dos puntos de $\mathbb{R}^3$ es el segmento de recta que los une. Para ello considerar $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva, $p = \alpha(a)$, $q = \alpha(b)$ y probar que:

    a) Dado $v \in \mathbb{R}^3$, $|v| = 1$, se tiene
    $$\langle q - p, v \rangle = \int_a^b \langle \alpha'(t), v \rangle \, dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| \, dt.$$

    b)
    $$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| \, dt.$$

14. (*) Calcular el triedro de Frenet de la curva $\beta(t) = (\frac{4}{5}\cos(t), 1 - \operatorname{sen}(t), -\frac{3}{5}\cos(t))$ y mostrar que es una circunferencia. ¿Cuáles son su centro y su radio?

15. (*) Sea $\alpha : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definida por
    $$\alpha(t) = \left(\frac{(1+t)^{3/2}}{3}, \frac{(1-t)^{3/2}}{3}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right).$$
    Probar que está parametrizada por longitud de arco y calcular su triedro de Frenet.

16. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada y simple, tal que en la región acotada por α se puede colocar un disco de radio r. Probar que la longitud de α es al menos $2\pi r$.

17. Encontrar los *vértices* de la curva $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$, donde $a \neq b$.