Práctico 3

Nota: Los ejercicios con (*) son opcionales.

1. Decir en cada caso en qué región el mapa $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular.

   a) $\varphi(u, v) = (u, uv, v)$.
   b) $\varphi(u, v) = (u^2, u^3, v)$.
   c) (*) $\varphi(u, v) = (u, u^2, v + v^3)$.
   d) $\varphi(u, v) = (\cos 2\pi u, \operatorname{sen} 2\pi u, v)$.

2. Mostrar que el conjunto $S = \{(x, y, z) :\ z = x^2 - y^2\}$ es una superficie regular y que los dos mapas que siguen son parametrizaciones de S.

   a) $\varphi(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$, con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
   b) $\psi(u, v) = (u \cosh v, u \operatorname{senh} v, u^2)$, con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ y $u \neq 0$.

3. Encontrar una parametrización del paraboloide $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 1 + x^2 + y^2\}$.

4. Mostrar que el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ es una superficie regular y encontrar parametrizaciones cuyos entornos coordenados lo cubran.

5. Mostrar que las coordenadas esféricas constituyen un sistema coordenado de la esfera unitaria S^2 y encontrar sistemas coordenados similares para cubrirla toda. Entender cómo se escriben en coordenadas los paralelos, los meridianos y los círculos máximos.

6. Decidir (sin demostración rigurosa) cuáles de los siguientes conjuntos son superficies regulares.

   a) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 0 \text{ y } x^2 + y^2 \leq 1\}$,
   b) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 0 \text{ y } x^2 + y^2 < 1\}$,
   c) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.
   d) La superficie cilíndrica cuya base es la curva plana C con forma de ocho del Ej. 1.11, es decir: $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in C\}$.

7. (*) Una manera de definir un sistema de coordenadas en la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ es mediante la proyección estereográfica, que lleva el punto $(x, y, z) \neq (0, 0, 2)$ de la esfera al punto del plano xy donde corta la recta que pasa por (x, y, z) y el punto $(0, 0, 2)$. Llamamos π a esta proyección.

   a) Mostrar que $\varphi = \pi^{-1}$ está dado por la fórmula

$$\varphi(u, v) = \frac{2}{u^2 + v^2 + 4}(2u, 2v, u^2 + v^2).$$

b) Mostrar que con esta carta y otra similar se puede cubrir la esfera con dos entornos coordenados.

c) Entender como se escriben en coordenadas los paralelos, los meridianos y los círculos máximos.

d) Desarrollar todo lo anterior de manera análoga para la esfera unitaria centrada en el 0.

8. Para cada una de las siguientes funciones hallar el dominio, encontrar sus puntos críticos y decidir para qué valores de c el conjunto $f^{-1}(c)$ es una superficie regular

   a) $f(x, y, z) = (x + y + z)^{-1}$ b) $f(x, y, z) = xyz^2$.

9. (*) ¿Existe una función diferenciable $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ para la cual 0 no es un valor regular de f, pero sin embargo $f^{-1}(0)$ es una superficie regular?.