Práctico 4

1. El *toro* es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ generado rotando un círculo de radio r alrededor de una línea recta, la cual se encuentra en el mismo plano que el círculo y a una distancia $R > r$ del centro del círculo.

   (a) Verificar que si la recta es el eje z, entonces los puntos del toro son exactamente los que satisfacen la ecuación $\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2 + z^2 = r^2$. Demostrar que el toro es una superficie regular.

   (b) Probar que la siguiente es una parametrización de un toro:
   $$\varphi(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\operatorname{sen} v, r\operatorname{sen} u),$$
   donde $0 < u < 2\pi$, $0 < v < 2\pi$).

2. *Superficies de revolución.*

   Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (r(t), h(t))$, una curva regular, inyectiva y con inversa continua con $r(t) > 0$ para todo t. Identificando $\mathbb{R}^2$ con el plano $y = 0$ en $\mathbb{R}^3$ y haciendo rotar la trayectoria de α alrededor del eje z se obtiene un conjunto S llamado *superficie de revolución generada por* α.

   (a) Hacer varios dibujos como ejemplos.

   (b) Probar que S es en efecto una superficie regular hallando cartas.

   (c) Definir meridianos y paralelos y calcular las longitudes de estos últimos.

   (d) Extender la definición de superficie de revolución para incluir al toro.

3. *Superficies regladas.*

   Una superficie se dice *reglada* si es generada por una familia de rectas o segmentos de recta que se mueven sobre una curva suavemente. Estas superficies admiten una parametrización como sigue. Sean $\beta, \gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ curvas regulares con $\gamma(t) \neq 0$ para todo t. Entonces la imagen de $\varphi(u,v) = \beta(u) + v\gamma(u)$ es una *superficie reglada*, con β su curva base y γ su directriz.

   (a) Mostrar que el helicoide es una superficie reglada.

   (b) Mostrar que la silla de montar M dada por la ecuación $z = xy$, está doblemente reglada, es decir hay dos parametrizaciones regladas distintas con distintos rayos.

   (c) Un *cilindro* es una superficie reglada con una parametrización de la forma
   $$\varphi(u,v) = \beta(u) + vq.$$
   Mostrar que la regularidad de φ es equivalente a que $\beta' \times q$ no sea nunca nulo.

4. Escribir el cambio de coordenadas para las cartas del Ejercicio 2 del Práctico 3.

5. Sea S una superficie dada implícitamente por $f(x, y, z) = 0$ (0 valor regular de f). Mostrar que el plano tangente afín en (x_0, y_0, z_0) está dado por:

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

6. Mostrar que los planos tangentes afines de $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en los puntos $(x, y, 0)$ son todos paralelos al eje z.

7. Sea S una superficie regular y sea $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función que lleva a cada punto $(x, y, z) \in S$ a al punto (x, y). ¿Es la función π diferenciable?

8. Consideremos la esfera $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ y el elipsoide $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}$.

   (a) Mostrar que la aplicación antipodal A de S^2, $A : x \mapsto -x$, es un difeomorfismo.

   (b) Probar que S^2 y E son difeomorfas.

9. Sea S una superficie regular y $f : S \to \mathbf{R}$. Un punto $p \in S$ se dice crítico para f si $df|_p = 0$

   Sea $f(p) = |p - p_0|$ con p_0 fuera de S fijo. Mostar que p es crítico para f si y sólo si la recta que pasa por p y p_0 es perpendicular a S en p.

10. Probar que si $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es lineal y S es una superficie invariante por L, entonces la restricción de L a S es diferenciable y $dL_p(w) = L(w)$, para todo $p \in S$ y $w \in T_pS$.

11. Mostrar que el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es difeomorfo a un plano.

12. Sean S^2 la esfera de radio 1 y centro en el origen, y $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Denotamos con N y S respectivamente los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, -1)$ y definimos $F : S^2 - \{N, S\} \to M$ de la siguiente manera: para cada $p \in S^2$ distinto de N y S, $F(p)$ es el punto donde corta a M la semirrecta que pasa por p perpendicular al eje z, que parte desde dicho eje. Demostrar que F es diferenciable.

13. Mostrar que si todos los puntos de una superficie conexa son puntos críticos de una función f, entonces f es constante.

14. (a) Mostrar que si todas las rectas normales a una superficie conexa pasan por un punto, entonces la superficie está contenida en una esfera.

    (b) (optativo) Más en general, probar que si todas las rectas normales a una superficie regular conexa pasan por una recta fija, entonces S es una superficie de revolución.

15. Demostrar que si una superficie regular S intersecta a un plano P únicamente en un punto p, entonces dicho plano es el plano tangente a S en p.