Geometría Diferencial - Práctico 5 - 2015 - FaMAF

1. a) Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $h : U \to \mathbb{R}$ una función acotada suave. Sea M la superficie dada por el gráfico de h. Escribir una expresión para el área de regiones en M que involucre las derivadas parciales de h.

   b) Se consideran el paraboloide de revolución $M = \{(x, y, x^2 + y^2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ y la silla de montar $N = \{(x, y, x^2 - y^2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Mostrar que las intersecciones de M y N con el cilindro sólido $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ tienen igual área.

2. En cada caso, mostrar que f es un difeomorfismo y decidir si preserva área de regiones, donde P es el plano $z = 0$ y C es el cono $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$.

   a) $f : P \to P$, $f(x, y, 0) = (x, 2y + \operatorname{sen} y, 0)$

   b) $f : P \to P$, $f(x, y, 0) = (3x + 5y + 2, 4x + 7y - 1, 0)$

   c) $f : C \to P - \{(0, 0, 0)\}$, $f(x, y, z) = (x, y, 0)$.

3. Sea S la esfera de centro cero y radio uno. Hallar el área de la intersección del hemisferio $y > 0$ de S con el semiespacio $z > 1/2$, recurriendo al área de regiones del cilindro.

4. Sea $\gamma(t) = (r(t), h(t))$ una curva regular con $r(t) > 0$ para todo t en un cierto intervalo abierto I. Se recerda que si

   \- $I = (0, a)$ y γ es inyectiva con inversa continua, o bien

   \- $I = \mathbb{R}$ y γ es periódica de período a e inyectiva en $[0, a)$,

   entonces
   $$S = \{(r(t) \cos s, r(t) \text{ sen } s, h(t)) \mid s \in I, t \in \mathbb{R}\}$$
   es una superficie regular, llamada superficie de revolución con curva generatriz γ.

   a) Mostrar que si γ tiene rapidez unitaria, entonces el área de S es $2\pi \int_0^a r(s)\, ds$.

   b) Hallar el área del toro de revolución de parámetros r, R como en el primer ejercicio del práctico 4. ¿Qué consume más pintura, pintar un dona con parámetros $R = 10$, $r = 3$ o una dona con parámetros $R = 7$, $r = 4$?

5. Mostrar que los difeomorfismos del ejercicio 2 no son isometrías.

6. Probar que si $f : M \to N$ satisface que $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es una isometría lineal para todo $p \in M$, entonces f es una isometría local.

7. a) Sean M y N dos superficies regulares. Sea F una isometría de $\mathbb{R}^3$ y suponer que $F(M) \subset N$. Probar que $F|_M : M \to N$ es una isometría local.

   b) Probar que las rotaciones alrededor del eje de una superficie de revolución S son isometrías de S.

8. Considerar el semiplano $M = \{(x, y, 0) \mid y > 0\}$ y el cono

$$C = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2, z > 0\right\}.$$

Encontrar una isometría local $f : M \to C$. Sugerencia: Tomar f que lleve rayos de M a rayos de C de la forma

$$f\left(t\left(\cos s, \sin s\right), 0\right) = \rho t\left(\cos\left(\lambda s\right), \sin\left(\lambda s\right), 1\right)$$

$(0 < s < \pi, t > 0)$ para ciertas constantes ρ y λ.

9. a) Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva de rapidez unitaria y curvatura nunca nula, y sea $\phi : (a, b) \times (0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\phi\left(s, t\right) = \alpha\left(s\right) + t\alpha'\left(s\right).$$

Verificar que $\phi_s \times \phi_t$ es nunca nula. Suponer que la imagen de ϕ es una superficie regular. Se denomina la *superficie tangente a la curva* α.

b) Mostrar que si dos curvas definidas en el mismo intervalo (a, b) tienen la misma función curvatura (nunca nula), entonces las superficies tangentes son localmente isométricas.

c) Considerar la hélice de rapidez unitaria $\alpha\left(s\right) = \left(a\cos\left(s/A\right), \operatorname{sen}\left(s/A\right), s/A\right)$, con $a > 0$ y $A = \sqrt{a^2 + 1}$. Encontrar una isometría local de la superficie tangente a α a un anillo en el plano $z = 0$ (describirlo como la superficie tangente a una circunferencia).

10. Sea C el cilindro $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$. Encontrar una isometría $f : C \to C$ tal que el conjunto de puntos fijos de f tenga exactamente dos elementos.

11. Sea f una isometría local que lleva los rayos del helicoide en los meridianos de una superficie de revolución M. Probar que M es esencialmente el catenoide.

12. Mostrar que una superficie cubierta por una sola carta es orientable. En particular el helicoide y los gráficos de funciones (definidas en abiertos del plano, con valores reales) son orientables.

13. Sea M la superficie definida como el conjunto de nivel de un valor regular de una función definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$. Probar que M es orientable. En particular, la cinta de Moebius no es el conjunto de nivel de un valor regular de ninguna función definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$.