**Práctico 6 - Geometría Diferencial - FaMAF - 2015**

1. Sea $U$ un abierto de $\mathbb{R}^2$, sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función, y sea $S$ la superficie definida por su gráfico.

   a) Mostrar que $n : S \to \mathbb{R}^3$,

   $$n(\varphi(x,y)) = \frac{1}{\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}} \left(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1\right),$$

   define un campo normal unitario en $S$, donde $\varphi(x,y) = (x, y, f(x,y))$.

   b) Para cada una de las siguientes funciones, definidas en su dominio, sea $S$ la superficie definida por su gráfico. Hallar en cada caso las direcciones principales, las curvaturas principales y las direcciones asintóticas (si existen) en el punto $p = (0,0,0)$. Decir qué tipo de punto es $p$.

   i) $f(x,y) = axy$ ii) $f(x,y) = (x+y)^2$ iii) $f(x,y) = x^4 + y^4$

   c) Calcular en cada caso la curvatura Gaussiana y la curvatura media en el punto $(0,0,0)$.

2. a) Hallar las curvaturas principales y la curvatura gaussiana de la superficie de revolución $M$ con curva generatriz $\gamma(t) = (r(t), h(t))$, para los casos particulares en que $\gamma$ es de rapidez unitaria o $h(t) = t$ para todo $t$. Mostrar que los meridianos y paralelos son líneas de curvatura.

   b) Si $M$ tiene curva generatriz $\gamma(t) = \left(e^{-t^2}, t\right)$, determinar los puntos de $M$ con curvatura gaussiana positiva.

3. Mostrar que el catenoide es una superficie mínima, es decir tiene curvatura media constante nula.

4. Sea $S$ la superficie de revolución generada por la curva de rapidez unitaria $\gamma(t) = (r(t), h(t))$, donde

   $$r(t) = C\cos t, \qquad h(t) = \int_0^t \sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2 u}\, du,$$

   con $0 < C \leq 1$. Probar que $S$ tiene curvatura gaussiana constante 1. Dibujarla para distintos valores de $C$.

5. Mostrar que el valor promedio de la curvatura normal en dos direcciones ortogonales cualesquiera en $p$ es $H(p)$.

6. Mostrar que en un punto hiperbólico, las direcciones principales son bisectrices de las direcciones asintóticas.

7. Sea $C \subset S$ una curva regular en una superficie $S$ con curvatura gaussiana $K > 0$. Mostrar que la curvatura $\kappa$ de $C$ en $p$ satisface

   $$\kappa \geq \min(|k_1|, |k_2|),$$

   donde $k_1$ y $k_2$ son las curvaturas principales de $S$ en $p$.

8. Mostrar que toda superficie compacta (cerrada y acotada) tiene un punto elíptico.

9. Sea $A$ el operador de forma de una superficie $M$ en el punto $p$ y sea $\{u, v\}$ una base ortonormal de $T_pM$. ¿Qué información geométrica da $\langle Au, v\rangle = 0$?

10. Sea $S$ la silla de mono, es decir, el gráfico de la función

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2.$$

a) Mostrar que por el cero pasan tres líneas asintóticas diferentes. Sugerencia: $x^3 - 3xy^2$ se factoriza como $x\left(x + \sqrt{3}y\right)\left(x - \sqrt{3}y\right)$.

b) Probar que las rotaciones en $120^o$ y $240^o$ alrededor del eje son isometrías de $S$.

c) Mostrar que $\alpha(t) = (t, 0, t^3)$ es una línea de curvatura de $S$ por cero y encontrar dos más usando b)

d) Probar que el origen es un punto planar de $S$.

11. Mostrar que si una superficie es tangente a un plano a lo largo de una curva, entonces los puntos de la curva son parabólicos o planares.

12. Sea $\alpha$ una curva espacial de rapidez unitaria y curvatura positiva. Mostrar que la superficie tangente a $\alpha$ tiene curvatura gaussiana cero.

13. Encontrar la curva guía del helicoide.

14. Sea $M$ la silla de montar definida como el gráfico de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$.

a) Probar que $\varphi(s, t) = \alpha(s) + tV(s)$, con

$$\alpha(s) = (s, s, 0) \quad \text{y} \quad V(s) = (1, -1, 4s),$$

es una presentación de $M$ como superficie reglada, y mostrar que $\alpha$ es una curva guía.

b) Hallar otra presentación reglada de $M$ con curva guía $b(s) = (s, -s, 0)$. En particular, $M$ es birreglada.

15. ¿Es verdad que si para un punto $p$ de una superficie existe un entorno que contiene puntos de $S$ a ambos lados del plano tangente $T_pS$, entonces $p$ es hiperbólico?

16. Hallar una superficie $S$ y un difeomorfismo $F : S \to S$ que preserve curvatura gaussiana (es decir $K(F(p)) = K(p)$ para todo $p \in S$), pero que no sea una isometría.