Práctico 7 - Geometría Diferencial - FaMAF - 2015

1. Sea p un punto de una superficie regular M. Mostrar que si T_pM tiene dos direcciones asintóticas ortogonales, entonces la curvatura media de M en p es nula.

2. Sea M el helicoide, parametrizado por $\phi(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, v)$.

   a) Probar que las curvas coordenadas son líneas asintóticas.

   b) Mostrar que M es una superficie mínima, es decir, que su curvatura media es idénticamente nula. *Sugerencia:* Ejercicio 1.

   c) ¿Qué ángulo forman las direcciones principales con las direcciones asintóticas? *Sugerencia:* Ejercicio 6 del práctico 6.

3. Mostrar que una isometría local entre superficies no preserva necesariamente el módulo de la curvatura media.

4. Sea S una superficie de revolución con curva generatriz de rapidez unitaria, parametrizada por $\varphi(s,t) = (r(t)\cos s, r(t) \operatorname{sen} s, h(t))$.

   a) Probar que los meridianos son geodésicas.

   b) Probar que un paralelo $s \mapsto \phi(s,t_0)$ es geodésica si y sólo si $r'(t_0) = 0$.

5. Considerar el toro de revolución obtenido al rotar el círculo $(x-R)^2 + z^2 = r^2$, $y = 0$, alrededor del eje z (con $0 < r < R$). Los paralelos generados por los puntos $(R+r, 0)$, $(R-r, 0)$, (R, r) son llamados paralelo máximo, paralelo mínimo y paralelo superior, respectivamente. Verificar cuál de estos paralelos es la trayetoria de una geodésica del toro.

6. Hallar todas las geodésicas del cilindro.

7. Sea M una superficie regular y sea P un plano que intersecta a M en la trayectoria de una curva α de rapidez unitaria.

   a) Probar que si la reflexión respecto de P lleva M en M (en particular es una isometría de M), entonces α es una geodésica de M. *Sugerencia:* Suponer sin pérdida de generalidad que P es el plano $z = 0$ y la reflexión está dada por $R(x,y,z) = (x,y,-z)$. Mostrar que

   $$dR_{\alpha(t)}\left(T_{\alpha(t)}M\right) = T_{\alpha(t)}M = u(t)^{\perp}$$

   se cumple para todo t, donde $u(t) = \alpha'(t) \times (0,0,1)$.

   b) Usando a), encontrar las trayectorias de dos geodésicas de la superficie definida por el gráfico de la función $f(u,v) = uv$ (silla de montar).

   c) Usando a), encontrar las trayectorias de tres geodésicas de la superficie definida implícitamente por $9x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

8. Mostrar que un campo paralelo a lo largo de una geodésica γ forma un ángulo constante con γ'.

9. Sea S la esfera de centro cero y radio 1 y sea α una parametrización por longitud de arco del paralelo de altura $1/2$. Sea W un campo paralelo a lo largo de α con $W(0) = \alpha'(0)$. Indicar cuántas vueltas da W respecto del marco móvil a lo largo de α cuando esta curva da una vuelta completa (ver la segunda animación en https://en.wikipedia.org/wiki/Foucault_pendulum). ¿Cuánto gira realmente W a lo largo de α?

10. Sea M el helicoide, parametrizado por $\phi(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, v)$.

    a) Calcular la curvatura geodésica de la hélice
    $$\alpha(t) = (\cos(at), \operatorname{sen}(at), at) \qquad\qquad (a = 1/\sqrt{2}).$$

    b) Indicar si α minimiza la distancia entre algunos puntos de su trayectoria.

    c) Encontrar el campo paralelo W a lo largo de α con $W(0) = \alpha'(0)$. ¿Cuánto vale en $t = \sqrt{2}\pi$?

11. Dado que se sabe que las geodésicas de la esfera son los círculos máximos, mostrar la existencia de triángulos geodésicos cuyos ángulos interiores suman más que π.

12. Sea γ una geodésica de una superficie regular M. Probar que si γ tiene curvatura nunca nula y está en un plano P, entonces γ es una línea de curvatura de M. *Sugerencia:* Mostrar primero que si N es normal a P, entonces $\{\gamma'(t), \gamma''(t), N\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ para todo t.

13. Considerar la esfera de radio uno, el cilindro y la silla de montar. Justificar por qué estas superficies no son localmente isométricas entre sí.

14. Probar que no existe una carta ϕ de la esfera S de centro cero y radio r tal que para todo (u, v) en el dominio de ϕ la base $\{\phi_u(u, v), \phi_v(u, v)\}$ de $T_{\phi(u,v)}S$ sea ortonormal.

15. Para cada $r > 0$, sea C_r el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$. Probar C_r no es isométrico al plano $z = 0$ ni al cilindro C_ρ si $\rho \neq r$. *Sugerencia:* Considerar las geodésicas periódicas.

16. Sea S el hiperboloide de revolución $x^2+y^2-z^2 = 1$, sea $p \in S$ con tercera coordenada mayor que dos, y sea $v \in T_pS$ un vector unitario que forma un ángulo de $\pi/3$ con el paralelo que pasa por p. Probar que la geodésica con velocidad inicial v nunca tiene tercera coordenada negativa. *Sugerencia:* Usar el Teorema de Clairaut.

17. Optativo. Sea p un punto en una superficie S. Se puede probar que si $r > 0$ es suficientemente pequeño, entonces la circunferencia intrínseca de radio r centrada en p, dada por
    $$C_p(r) = \{\gamma(r) \mid \gamma \text{ es una geodésica de rapidez unitaria en } S \text{ con } \gamma(0) = p\},$$
    es la imagen de una curva en S. Verificar en el caso particular en que S es la esfera de radio R que la aproximación de Taylor de tercer grado de la función $r \mapsto \operatorname{long}(C_p(r))$ es $2\pi r - \frac{2\pi}{3!} K(p) r^3$, donde K es la curvatura Gaussiana. (Esto vale en general y proporciona una interpretación intrínseca de la curvatura Gaussiana.)