Métodos Numéricos

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/metodos_numericos.html

Guía 3

Mayo de 2016

Problema 1: Para las siguientes funciones $f(x)$, y siendo $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$ y $x_2 = 0.9$, construya los polinomios de interpolación de grado 1 y 2 que aproximan la función en $x = 0.45$, y encuentre el error absoluto y relativo correspondiente.

a) $f(x) = \ln(x + 1)$

b) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

Grafique en un archivo postscript ambas funciones, sus polinomios interpolantes y la aproximación de Taylor de grado 2 (entorno a x_o) en el rango dado.

Problema 2: Construya el polinomio interpolante usando el algoritmo de Lagrange para las siguientes funciones. De una cota del error absoluto en el intervalo $[x_0, x_n]$.

a) $f(x) = \exp(2x)\cos(3x)$, $\quad x_0 = 0$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.6$, $n = 2$.

b) $f(x) = \ln(x)$, $\quad x_0 = 1$, $x_1 = 1.1$, $x_2 = 1.3$, $x_3 = 1.4$, $n = 3$.

Problema 3: Se desea aproximar $\cos(x)$ en el intervalo $[0, 1]$ con un error absoluto menor a 1×10^{-7} para todo $x \in [0, 1]$. Usando el teorema del error de la interpolación polinomial, encuentre la cantidad mínima de puntos de interpolación. Verifique graficando (con *gnuplot* y *xmgrace*, salvando ambos archivos) el error absoluto en el intervalo para tres casos particulares de $\{x_i\}$.

Problema 4: *Error de la interpolación polinomial para puntos equiespaciados:* Usando el teorema dado en el teórico, demuestre el siguiente

corolario: Sea $f(x)\varepsilon C^{(n+1)}_{[a,b]}$ tal que su derivada $n + 1$ es acotada en $[a, b]$: $\exists M > 0/|f^{(n+1)}(x)| < M \ \forall\, x\varepsilon[a, b]$. Definimos $x_i = a + i \ ; i = 0, \cdots, n$ donde $h = (b - a)/n$. Sea $P_n(x)$ es el polinomio interpolante a $f(x)$: $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \cdots, n$, entonces $\forall\, x\varepsilon[a, b]$ se tiene

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{4(n + 1)} \left(\frac{b - a}{n}\right)^{n+1}$$

Problema 5: Sea $F(x) = xe^x$. Evalúe $f'(2)$ mediante la fórmula centrada de tres puntos

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

para distintos valores de h y calcule el incremento óptimo h_o teniendo en cuenta los errores de truncamiento y redondeo. Grafique el error (usando el valor exacto de la derivada) versus h (elija $h = 10^{-k}$, con k entero, y grafique usando escala *log-log*).

Problema 6: *Algoritmo de derivada numérica de 5 puntos* Muestre que si Si $f(x)$ es cinco veces diferenciable en $x = c$

a) muestre que se puede obtener aproximaciones a $f'(c)$ y $f''(c)$ como:

$$f'(c) = \frac{1}{12h}\left(f(c-2h) - 8f(c-h) + 8f(c+h) - f(c+2h)\right) + O(h^4)$$

$$f''(c) = \frac{1}{12h^2}\left(-f(c-2h) + 16f(c-h) - 30f(c) + 16f(c+h) - f(c+2h)\right) + O(h^4)$$

b) muestre que estos algoritmos dan las derivadas primera y segunda exactas para polinomios de grado ≤ 4.

Problema 7: *Derivada segunda:* Deduzca el algoritmo centrado equiespaciado de tres puntos para la derivada segunda f"(x_0). Incluya una cota para el error absoluto.

Problema 8: *Interpolación y diferenciación:* Se conoce el valor de $f(x)$ en tres puntos x_0, x_1, x_2. Escriba el polinomio interpolante $P_2(x)$ en la forma de Lagrange. Asuma que aproximamos $f'(x_i)$ por $P_2'(x_i)$,

a) Muestre que si tomamos $x_0 = c - h$, $x_1 = c$, $x_2 = c + h$ obtenemos la expresión del algoritmo centrado de tres puntos para $f'(c)$.

b) Muestre que, en general, esta proximación arroja el algoritmo de tres puntos. Re-obtenga la fórmula dada en el teórico para $x_0 = c - h_1$, $x_1 = c$, $x_2 = c + h_2$. Obtenga una expresión para las derivadas en extremos del intervalo $[a, b]$, $f'(a)$ con $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$ y $f'(b)$ con $x_0 = b$, $x_1 = b - h$, $x_2 = b - 2h$.

c) Generalice a 5 puntos y re-obtenga el algoritmo centrado y equiespaciado en este caso.

Problema 9: Use los algoritmos *hacia adelante*, *centrado* y *de 5 puntos* para calcular las derivadas de $\cos x$ y e^x, en $x = 0.1, 1.$ y 100.

a) Escriba en archivo el valor de la derivada y el error relativo, E, en función de h. Elija valores del *paso* h entre 0.1 y ϵ_m.

b) Haga un gráfico *log–log* de E versus h, y verifique si el número de cifras decimales que obtiene coincide con las estimaciones hechas en el teórico.

c) Identifique las regiones donde domina el error del algoritmo y el error de redondeo, respectivamente. Las pendientes que se observan, corresponden a las predichas en el teórico?