

Métodos Numéricos

<http://www.famaf.unc.edu.ar/~serra/mn14.html>

Guía 4 – Mayo de 2016

Problema 1:

- a) Realice un programa que integre numéricamente la función

$$I = \int_0^1 e^{-x} dx$$

utilizando *regla compuesta del trapecio*. El intervalo de integración debe ser dividido en N subintervalos del mismo tamaño h . La salida debe ser la aproximación S obtenida.

- b) Calcule, utilizando el programa del punto anterior, el error $\varepsilon(h) = |S - I|$, para $h = 0.05$ y $h = 0.025$. Verifique que el cociente de precisión

$$Q = \frac{\varepsilon(h)}{\varepsilon(h/2)}$$

sea aproximadamente 4.

Problema 2: Repita el problema anterior empleando ahora la *regla compuesta de Simpson*. Verifique que el cociente de precisión es ahora 16.

Problema 3: Muestre que la regla de Simpson integra exactamente polinomios de grado 3.

Problema 4: Desarrolle un programa simple, donde el programa principal (*main*) solamente llame a subrutinas basadas en los programas para los algoritmos del Trapecio y de Simpson. Use doble precisión. Para ello cree un módulo con la precisión y en el mismo incluya las subrutinas para cada método y las funciones.

Utilice el programa para aproximar las siguientes integrales con un error relativo menor a 10^{-7} . Indique, en cada caso, el número de puntos utilizado.

a) $\int_{0.5}^1 x^4 dx$

b) $\int_0^{0.5} \frac{2}{x-4} dx$

c) $\int_1^{1.5} x^2 \log x dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx$

Problema 5: *Fórmula de integración de Euler-McClaurin*

- a) Deduzca la fórmula de integración de Euler-McClaurin:

$$\int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{f(b)}{2} \right) + \frac{h^2}{12} (f'(a) - f'(b)) + O(h^4)$$

- b) Muestre que integra exactamente polinomios de grado 3.

Problema 6: *Cuadratura de Gauss-Legendre de 3 puntos*

- a) Calcule los puntos y pesos correspondientes a la cuadratura de Gauss-Legendre (G-L) de 3 puntos, esto es, intervalo $[-1, 1]$ y función de peso $w(x) = 1$.
- b) Utilice cuadraturas de G-L de 2 y 3 puntos para estimar la integral

$$\int_1^{3/2} e^{-x^2} dx,$$

y compare los errores relativos de ambas.

- c) Realice ahora la integral utilizando el código que escribió para cuadraturas de trapecioide y Simpson al mismo error relativo que G-L de 3 puntos. Qué valores de N debe usar en cada caso?

Problema 7: *Cuadratura de Gauss-Legendre. Comparación con otros métodos.*

- a) Escriba un programa que calcule la integral

$$I = \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - e^{-1}.$$

utilizando la cuadratura de Gauss-Legendre. Para calcular los puntos y pesos necesarios use la subrutina *gauss* que se provee.

- b) Calcule el error relativo $\epsilon = |(numérico - exacto)/exacto|$ para distintos valores de número de puntos de integración (N). Considere valores de N consecutivos hasta 100, y luego de 100 en 100 hasta $N = 3000$. Repita el cálculo empleando los algoritmos de Simpson y Trapecio.
- c) Haga un gráfico completo y de calidad (elegiendo adecuadamente la escala y el rango para que se aprecien bien los resultados, con título, nombres de ejes, letra legible, colores, distintas líneas y/o puntos en caso que se superpongan resultados, leyendas apropiadas, tics visibles y adecuados) en escala *log-log* comparando los errores relativos *versus* N . Observe que

$$\epsilon \approx CN^\alpha \Rightarrow \log \epsilon = \alpha \log N + constante$$

Esto significa que una dependencia como ley de potencia aparece como una línea recta en un gráfico *log-log*.

- d) Use el gráfico para estimar las leyes de potencia de la dependencia del error ϵ con el número de puntos N y para determinar el número cifras decimales de precisión en cada método. Haga esto tanto para el error del algoritmo como para el de redondeo.
- e) Repita los incisos anteriores usando doble precisión.

Problema 8: *Cuadratura de Gauss-Laguerre de 2 puntos*

- a) Calcule los puntos y pesos correspondientes a la cuadratura de Gauss-Laguerre (G-La) de 2 puntos, esto es, intervalo $[0, \infty)$ y función de peso $w(x) = \exp(-x)$.

- b) La integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

aparece en el tratamiento de la radiación de cuerpo negro de Planck que da nacimiento a la mecánica cuántica en el año 1900. Evalúe la misma usando la cuadratura de Gauss-Laguerre de 2 puntos y calcule el error relativo.

Problema 9: *Cuadratura de Gauss-Hermite de 3 puntos*

- a) Calcule los puntos y pesos correspondientes a la cuadratura de Gauss-Hermite (G-H) de 3 puntos, esto es, intervalo $(-\infty, \infty)$ y función de peso $w(x) = \exp(-x^2)/\sqrt{\pi}$.

- b) Utilice cuadraturas de G-H de 2 y 3 puntos para estimar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} e^x dx,$$

y compare los errores relativos de ambas.

Problema 10: *Integración numérica en dos dimensiones*

- a) Haga un programa que integre funciones en la región $a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$ siguiendo el código delineado en la clase teórica, usando el método de cuadratura de Simpson en cada coordenada.

- b) Evalúe numéricamente con no menos de 8 cifras significativas las integrales

$$\int_0^2 dx \int_0^1 dy e^{-xy} \quad ; \quad \int_{1.4}^2 dx \int_1^{3/2} dy \ln(x + 2y)$$

- c) Modifique el programa para permitir que los límites de integración en y sean función de x y evalúe la integral

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy e^{-xy}$$

Ejercicio Complementario

Problema 11: *Fórmula de Integración de Newton-Cotes* Estas fórmulas se basan en la idea de integrar una función polinomial en vez de $f(x)$, i.e.

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_n(x) dx$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio interpolante de grado n para ciertos valores de x que se escogen apropiadamente en el intervalo $[a, b]$. Muestre que si se eligen puntos equiespaciados y que incluyan los extremos (fórmula cerrada), los casos $n = 1$ y $n = 2$ corresponden a la regla del Trapecio y de Simpson, respectivamente. *Ayuda:* use la forma de Lagrange para el polinomio interpolante, y calcule los pesos de la fórmula de integración resultante.