Métodos Numéricos

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/metodos_numericos.html

Guía 6 – Junio de 2016

Problema 1: Escriba un programa en Fortran que te permita resolver numéricamente el problema de valores iniciales de la forma,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,t) \\ x(a) &= x_0 \end{aligned}$$

utilizando el método de Euler en el intervalo $a \leq t \leq b$ con un paso de integración de h. La salida debe ser un archivo de dos columnas: t y $x(t)$.

Resuelva con el mismo el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + \sin(2\pi t) \\ x(0) &= 1.0 \end{aligned}$$

en el intervalo $0 \leq t \leq 1$ con un paso de integración $h = 0.1$. Sabiendo que la solución exacta es:

$$x_e(t) = \Big(1 + \frac{2\pi}{1+4\pi^2}\Big)e^{-t} + \frac{\sin(2\pi t) - 2\pi\cos(2\pi t)}{1+4\pi^2},$$

modifique el programa de forma tal que calcule también el error global $\epsilon(t) = |x(t) - x_e(t)|$. Grafique $\epsilon(t)$ usando $h = 0.01$ y $h = 0.005$ y verifique que en el segundo caso el mismo disminuye a la mitad.

Problema 2: *Método de Runge-Kutta de orden 3:* Encuentre las ecuaciones que relacionan los pesos $\vec{b}$, los nodos $\vec{c}$ y la matriz $\mathbf{A}$ para el método RK3.

Problema 3: *Método de Runge-Kutta de orden 4:* Muestre que la elección dada en el teórico para los pesos $\vec{b}$, los nodos $\vec{c}$ y la matriz $\mathbf{A}$ para el método RK4:

$$\vec{b} = (1/6, 1/3, 1/3, 1/6) \quad ; \quad \vec{c} = (0, 1/2, 1/2, 1) \quad ; \quad a_{2,1} = a_{3,2} = 1/2 \; ; \; a_{4,3} = 1$$

conduce a las ecuaciones RK4 "clásicas" dadas en clase.

Problema 4: Escriba un programa en Fortran que resuelva numéricamente el problema de valores iniciales de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,t) \\ x(a) &= x_0 \end{aligned}$$

utilizando el método de Runge-Kutta de 4° orden en el intervalo $a \leq t \leq b$ con un paso de integración de h. La salida debe ser un archivo de dos columnas: t y $x(t)$.

Resuelva el problema de valores inciales del Problema 1, pero esta vez usando el método de Runge-Kutta de 4° orden en lugar del método de Euler. Compare ambos resultados con igual valor de h (grafique $\epsilon(t)$ vs. t).

Problema 5: Considere el problema de valores iniciales para la ecuación de la dinámica de un péndulo simple de longitud l

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = \dot{\theta}_0,$$

donde g es la acelaración de la gravedad. Definiendo $u = \dot{\theta}$ esta ecuación de segundo orden se puede escribir como un sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\frac{d\theta}{dt} = u \tag{1}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) \tag{2}$$

mientras que las condiciones iniciales transformadas quedan $(u(0), \theta(0)) = (\dot{\theta}_0, \theta_0)$.

Modifique el programa del ejercicio 3 de forma tal que resuelva ahora este sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas usando $g = 10m/s^2$ y $l = 1m$. La salida debe ser un archivo de tres columnas t, $\theta(t)$ y $u(t)$.

a) Grafique θ vs. t, para $0 \leq t \leq 10$, con las siguientes condiciones iniciales: a) $u(0) = 0$ y $\theta(0) = 0.5$ y b) $u(0) = 0$ y $\theta(0) = 0.25$

b) Modifique el programa para que calcule la energía del sistema en cada paso, y la escriba en un archivo de salida. Para las condiciones del inciso anterior grafique la energía vs. t. Analice la conservación para distinto valores de h.

c) Para las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$, y $u(0) = 0$, y sólo cuando $\theta_0 \ll 1$, las ecuaciones de movimiento del péndulo se pueden aproximar por las siguientes:

$$\frac{d\theta}{dt} = u \tag{3}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{g}{l}\theta. \tag{4}$$

Modifique el programa para resolver estas ecuaciones y compare con la la solución exacta ($\theta(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{10}t)$.) Para verificar esto graficar la diferencia $\theta(t) - \theta_0 \cos(\sqrt{10}t)$, para $0 \leq t \leq 10$, en los casos $\theta_0 = 1$ y $\theta_0 = 10^{-2}$. En los mismos gráficos comparar con la solución exacta del problema, i.e. con la solución numérica de las ecuaciones (1) y (2).

Problema 6: Considere la siguiente ecuación diferencial

$$y'' = \frac{1}{8}\left(32 + 2x^3 - yy'\right) \qquad \text{para } 1 \leq x \leq 3$$

a) Utilice el método de Runge-Kutta de 4° orden en el intervalo $1 \leq x \leq 3$ para resolver esta ecuación con las condiciones iniciales $y(1) = 17$, $y'(1) = 0$. Encuentre, además $y'(3)$.

b) Repita el inciso anterior, pero con las condiciones iniciales $y(1) = 17$, $y'(1) = -40$.

c) Use ahora el método de disparo para resolver la misma ecuación diferencial con las condiciones de borde $y(1) = 17$, $y'(3) = 0$. Con la información de los incisos anteriores implemente un método de bisección con una tolerancia de 10^{-10}. Escriba en archivo el número de la iteración y el valor de la derivada en $x = 3$, y una vez encontrada la solución, en otro archivo, escriba x, e $y(x)$, para una grilla de 400 valores equiespaciados de x, entre 0 y 3. Grafique la convergencia y la solución.

Problema 7: Desarrolle un programa que implemente el método de Jacobi para resolver el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$. Los datos de entrada deben ser la tolerancia δ y el número máximo permitido de iteraciones.

El programa debe leer los valores de las entradas de A, $\vec{b}$ y de la iteración inicial $\vec{x}_0$ de tres archivos de datos.

Para cada iteración, el programa debe imprimir en pantalla el número s de iteración y el valor de la norma $\|\vec{x}^s - \vec{x}^{s-1}\|_1$, donde

$$\|\vec{x}^s\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i^s|$$

El programa debe detenerse cuando alcanza el número máximo de iteraciones o si se cumple la condición: $\|\vec{x}^s - \vec{x}^{s-1}\|_1 \leq \delta$; debe imprimir además la iteración final en formato exponencial y con diez decimales.

Utilice el programa desarrollado para resolver, mediante el método de Jacobi, el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y también} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 8: Modifique el código del problema anterior para que implemente el método de Gauss–Seidel para resolver sistemas lineales. Resuelva ahora los siguientes sistemas:

a)

$$\begin{array}{lcccl} 0.0001x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lclclcl} 3.03x_1 & - & 12.1x_2 & + & 14x_3 & = & -119 \\ -3.03x_1 & + & 12.1x_2 & + & 7x_3 & = & 120 \\ 6.11x_1 & - & 14.2x_2 & + & 21x_3 & = & -139 \end{array}$$

.

Problema 9: Resuelva numéricamente el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1999 \\ 1997 \end{pmatrix}$$

utilizando los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. Convergen?

Problema 10: Decida si los métodos de Jacobi y/o Gauss-Seidel son aplicables para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. En cada caso afirmativo calcule las soluciones, en el caso (a) con $\delta = 10^{-11}$, en el caso (b) con $\delta = 10^{-4}$. Cuántas iteraciones son necesarias en cada caso para alcanzar la precisión deseada?

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(b)} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Problemas complementarios

Problema 11: La llamada *ecuación logística*

$$\frac{dN}{dt} = r\,N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

describe el crecimiento autolimitado de una población dada (suponiendo que no interactúa con otras especies y que tiene fuentes limitadas de alimentos). Fue propuesta por Verhulst en 1838 y permite describir al menos cualitativamente varios fenómenos poblacionales observados en la naturaleza. En esta ecuación $N(t)$ es el número de individuos de la colonia al tiempo t y K es una constante positiva.

Una solución N^* se dice estacionaria si se satisface que $dN^*/dt = 0$, y por ende no cambia en el tiempo. Para esta ecuación es fácil verificar que sólo existen dos soluciones estacionarias: $N_1^* = 0$ y $N_2^* = K$.

Determine cual de las dos soluciones estacionarias es estable y cual inestable resolviendo numéricamente la ecuación diferencial con el método Runge-Kutta de cuarto orden para $r = 2$, $K = 100$, en el intervalo $0 \leq t \leq 50$ con $h = 0.1$ y considerando cinco condiciones iniciales diferentes: a) $N(0) = 0$, b) $N(0) = 2$, c) $N(0) = 50$, d) $N(0) = 120$ y d) $N(0) = 200$. Grafique simultaneamente las cinco soluciones t vs. $N(t)$ en el intevalo $0 \leq t \leq 50$.

Problema 12: Modifique el programa que implementa el método de Jacobi para que guarde en las sucesivas filas de un archivo de salida los valores de las iteraciones $\vec{x}^s$. Utilizando este programa resuelva el sistema con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \end{pmatrix}$$

con los distintos valores iniciales

$$\textbf{(a)}\ \vec{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(b)}\ \vec{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(c)}\ \vec{x}^0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente grafique los puntos de las sucesiones de iteraciones obtenidas usando gnuplot.