

Métodos Matemáticos de la Física

<http://www.famaf.unc.edu.ar/~serra/mmf.html>

Guía 0 – Agosto de 2014

Tema: Repaso de elementos imprescindibles para la materia aprendidos en asignaturas anteriores. Sistemas de ecuaciones lineales, integrales definidas y primitivas de funciones

Problema 1: Resolver los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{rclcrclcrclcrcl} x & -2y & +z & = & 7 & x & +2y & -3z & +4t & = & 2 & 2x & -5y & +3z & -4s & +2t & = & 4 \\ 2x & -y & +4z & = & 17 & 2x & +5y & -2z & +t & = & 1 & 3x & -7y & +2z & -5s & +4t & = & 9 \\ 3x & -2y & +2z & = & 14 & 5x & +12y & -7z & +6t & = & 7 & 5x & -10y & -5z & -4s & +7t & = & 22 \end{array}$$

se recomienda realizar eliminación gaussiana (i.e. reducir a una forma triangular y hacer sustitución hacia atrás)

Problema 2: ¿Qué condición debe imponerse a a, b y c para que el siguiente sistema, con incógnitas x, y y z tenga solución?

$$\begin{array}{rclcrcl} x & +2y & -3z & = & a \\ 2x & +6y & -11z & = & b \\ x & -2y & +7z & = & c \end{array}$$

Problema 3: Determinar si cada uno de los sistemas siguientes tiene una solución no nula:

$$\begin{array}{rclcrclcrclcrclcrcl} x & -2y & +3z & -2w & = & 0 & x & +2y & -3z & = & 0 & x & +2y & -z & = & 0 \\ 3x & -7y & -2z & +4w & = & 0 & 2x & +5y & +2z & = & 0 & 2x & +5y & +2z & = & 0 \\ 4x & +3y & +5z & +2w & = & 0 & 3x & -y & -4z & = & 0 & x & +4y & +7z & = & 0 \\ & & & & & & & & & & & x & +3y & +3z & = & 0 \end{array}$$

Problema 4: Encontrar la dimensión y una base para la solución general del sistema homogéneo:

$$\begin{array}{rclcrclcrclcrcl} x & +3y & -2z & +5s & -3t & = & 0 \\ 2x & +7y & -3z & +7s & -5t & = & 0 \\ 3x & +11y & -4z & +10s & -9t & = & 0 \end{array}$$

Mostrar cómo la base da la forma paramétrica de la solución general del sistema.

Problema 5: Calcular las primitivas de las siguientes funciones racionales

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int \frac{x^4 + x^3 - 9x^2 - 2x + 11}{(x+3)(x-2)} dx. & \text{(b)} \int \frac{x^2 - 5x + 8}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx. \\ \text{(c)} \int \frac{x^2 - 5x + 2}{x^3 + 2x^2} dx. & \text{(d)} \int \frac{3x^2 - 17x + 24}{(x-1)(x^2 - 6x + 10)} dx. \end{array}$$

Problema 6: Calcular las siguientes integrales indefinidas

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int \sec x dx. & \text{(b)} \int \sec^3 x dx. \end{array}$$

Problema 7: (a) Encontrar una primitiva de $\cosh^2(x)$.

(b) Hallar una fórmula para $\sinh^{-1}(x)$. Sugerencia: Multiplicar ambos miembros de $\sinh x = y$ por e^x y resolver la ecuación de segundo grado en e^x obtenida.

Problema 8: Probar que las siguientes afirmaciones son válidas para todo x, y .

1. $\sinh'(x) = \cosh(x)$.
2. $\cosh(\sinh^{-1}(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$.
3. $(\sinh^{-1})'(x) = 1/\sqrt{x^2 + 1}$.
4. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

Problema 9: Calcular por sustitución, usando funciones trigonométricas o hiperbólicas.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} & \text{(b)} \int \sqrt{1-x^2} dx & \text{(c)} \int \sqrt{x^2-1} dx \\ \text{(d)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} & \text{(e)} \int \sqrt{x^2+1} dx & \end{array}$$

Problema 10: La sustitución $t = \tan \frac{x}{2}$, o equivalentemente, $x = 2 \arctan t$, transforma cualquier integral que involucre sólo senos y cosenos vinculados por suma, producto o cociente, en la integral de una función racional. Aplicarla en los siguientes casos.

$$\text{(a)} \int \frac{dx}{1 + \cos x} \qquad \text{(b)} \int \frac{dx}{2 + \sin x + \cos x}$$

Problema 11: Calcular las siguientes integrales indefinidas.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{\log(\log x)}{x \log x} dx & \text{(b)} \int \frac{dx}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} & \text{(c)} \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \\ \text{(d)} \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} & \text{(e)} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} & \text{(f)} \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx \\ \text{(g)} \int \frac{dx}{2 + \tan x} & \text{(h)} \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 2x + 4}{x^4 + 2x^2 + 1} dx & \end{array}$$

Problema 12: Resuelva:

$$\text{(a)} i^{431} \qquad \text{(b)} (1+i)^{10^k} \qquad \text{(c)} z^4 - 16 = 0 \qquad \text{(d)} z^4 + 16 = 0$$

Problema 13: Calcular las siguientes integrales definidas.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_1^e x \log^2 x dx & \text{(b)} \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \sin x} & \text{(c)} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx \\ \text{(d)} \int_0^\pi \sin^6 x dx & \text{(d)} \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2} dx & \text{(e)} \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^n dx \\ \text{(f)} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} & \text{(g)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sinh(ax)}{\sinh(\pi x)} ; 0 < a < \pi & \text{(h)} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{a + b \cos(x)} dx ; a > |b| \end{array}$$