Métodos Matemáticos de la Física

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/mmf.html

Guía 1 – Agosto de 2014

Problema 1: Considere $F([a,b])$, las funciones definidas sobre un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con valores complejos.

a) Demuestre que $F([a,b])$ es un espacio vectorial complejo.

b) ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $F([a,b])$ es un subespacio? Las funciones continuas; las funciones continuas f con $f(a) = 23$; las funciones que se anulan en un determinado número finito de puntos de $[a,b]$; las funciones dos veces diferenciables que se anulan en un subintervalo fijo $(c,d]$ de $[a,b]$ $(a \leq c < d \leq b)$; las funciones acotadas.

Problema 2:

a) Muestre que los polinomios en una variable real x de grado menor o igual a N forman un espacio vectorial, que denominamos $\{p_N(x)\}$.

b) Muestre que, en $\{p_5(x)\}$, 1, x, x^2 son linealmente independientes. Que puede decir de $2\,x$, $5\,x^2$, $x + x^2$?

Problema 3: Muestre que las funciones $\mathrm{sen}(n\,x)$; $n = 1, 2, \cdots$, son linealmente independientes en $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$.

Problema 4: Muestre que las funciones 1, e^x y e^{2x} son linealmente independientes en $\mathcal{C}([a,b])$ para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Problema 5: Si $w \in \mathbb{C}^3$, muestre que los vectores $z \in \mathbb{C}^3$ tales que $\langle z, w\rangle = 0$ forman un subespacio. ¿Cuál es la dimensión de este subespacio?

Problema 6: Dado un producto escalar $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ sobre un espacio vectorial real o complejo V, demuestre la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\| \quad , \quad f, g \in V \ ,$$

y que hay igualdad si y sólo si f y g son linealmente dependientes.

Problema 7: Si A, B y C son matrices cuadradas, pruebe que:

a) $(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$;

b) $(AB)^T = B^T\,A^T$;

c) $(AB)^\dagger = B^\dagger\,A^\dagger$;

d) $\mathrm{Tr}\,(ABC) = \mathrm{Tr}\,(BCA)$;

e) $\det(AB) = \det(A)\,\det(B)$.

Problema 8: En $\mathcal{C}_\infty([a,b])$ considere

$$(Df)(x) = f'(x)\ ,\quad (Lf)(x) = \int_a^x f(t)dt\ ,\quad x \in [a,b]\ .$$

Muestre que son efectivamente operadores lineales de $\mathcal{C}_\infty([a,b])$. Determine los núcleos de D y de L, y las aplicaciones inversas cuando existen. Calcule $D^n L^k$ y $L^k D^n$ para $n,k \in \mathbb{N}$. Demuestre que L es acotado mientras que D no lo es; i.e., $\|Lf\| \leq \|f\|\,|b-a|$, para toda f, pero que no existe $K \geq 0$ tal que $\|Df\| \leq K\|f\|$, para toda f.

Problema 9: Demuestre que los vectores (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) y (z_1, z_2, z_3) de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes si y sólo si

$$det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \neq 0 \; .$$

Problema 10: Demuestre cada una de las siguientes proposiciones relativas a una matriz A, $n \times n$, real y ortogonal:

a) Si λ es un autovalor real de A, entonces $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$.

b) Si λ es un autovalor complejo de A, el complejo conjugado $\bar{\lambda}$ también es autovalor de A. Es decir, los autovalores de A no reales son conjugados a pares.

c) Si n es impar, A tiene por lo menos un autovalor real.

Problema 11: Sea V un espacio euclídeo real de dimensión n. Una transformación ortogonal $T : V \to V$ con determinante igual a 1 se llama rotación. Si n es impar, demuestre que 1 es autovalor para T. Esto prueba que toda rotación de un espacio de dimensión impar tiene un eje fijo.

Problema 12: Sean V y W espacios vectoriales sobre los mismos escalares y $A : V \to W$, $B : W \to V$ dos aplicaciones lineales tales que $AB = \mathbf{1}_W$ y $BA = \mathbf{1}_V$. Demuestre que A es inyectivo y suryectivo y B es su inversa.

Problema 13: Una transformación lineal T se llama **nilpotente** si para algún número natural k se cumple que $T^k = 0$. Probar:

a) Si λ es un autovalor de T entonces $\lambda = 0$.

b) $\lambda = 0$ es un autovalor de T.

Se concluye entonces que el conjunto de autovalores de un operador nilpotente es exactamente $\{0\}$.

c) Sea V el espacio vectorial de polinomios complejos de grado menor o igual que $n-1$. Considere sobre este espacio el operador lineal derivación D. Probar que D es nilpotente.

Problema 14: El arreglo espacial de un sólido cristalino puede ser descripto por un espacio vectorial V de dimensión n (usualmente $n = 1, 2$ o 3), cuya base esta dada por los vectores $(a_1,\, a_2, \cdots,\, a_n)$. Los elementos de este espacio vectorial, para cristales en el espacio tridimensional, esán dados por:

$$\vec{R} \, = \, n_1\, a_1 + n_2\, a_2 + n_3\, a_3 \; ; \; n_1, n_2, n_3 \,\epsilon\, \mathbb{Z} \, .$$

Se define el espacio dual V^* de V por la relación

$$\vec{K} \,\epsilon\, V^* \;\Leftrightarrow\; e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}} \, = \, 1$$

a) Encuentre una base de V^*.

b) Escriba un elemento arbitrario de V^* en esta base.

V^* recibe el nombre de *espacio recíproco*, y su base el de *base recíproca*, y son de importancia en física del sólido.

c) Considere la red triangular en $\mathbb{R}^2$, esto es, un arreglo de puntos cuya unidad fundamental es un tríangulo eqquilátero. Dé las bases de V y V^*. ¿Que red describe V^*?.

Problema 15: Considere las sucesiones infinitas c_∞ de números complejos $z = (z_1, z_2, z_3, \cdots)$ $(z_j \in \mathbb{C})$. Verifique que c_∞ provisto con la suma y producto por escalares complejos definidas componente por componente, es un espacio vectorial complejo. Sea $S : c_\infty \to c_\infty$ definido por $Sz := (0, z_1, z_2, z_3, z_4, \cdots)$, $z = (z_1, z_2, \cdots) \in c_\infty$. Verifique que S es un operador lineal y que es inyectivo. Determine el inverso $T_o : S(c_\infty) \to c_\infty$ tal que $T_o S = \mathbf{1}$. Verifique que T_o puede extenderse a un operador lineal $T : c_\infty \to c_\infty$, que no es inyectivo pero admite un inverso por derecha.

Problema 16: Demuestre que si $A : V \to W$ es lineal e inyectivo, y $f_1, f_2, \cdots, f_n \in V$ son linealmente independientes, entonces $Af_1, Af_2, \cdots, Af_n$ también lo son.

Problema 17: Sean V y W espacios vectoriales de la misma dimensión finita, y $A : V \to W$ un operador lineal. Demuestre que A es inyectivo si y sólo si es suryectivo. ¿Qué sucede cuando la dimensión no es finita?

Problema 18: En $\mathbb{C}^2 = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{C}\}$ sean $M := \{(x, x) : \ x \in \mathbb{C}\}$, $N := \{(x, 0) : \ x \in \mathbb{C}\}$, y $K := \{(0, x) : \ x \in \mathbb{C}\}$. Demuestre que (M, N), (M, K) y (N, K) son pares de subespacios complementarios. Determine la proyección E con $M = E(\mathbb{C}^2)$ y $N = \{z \in \mathbb{C}^2 : \ Ez = 0\}$. Haga lo mismo para los otros pares llamando a estas proyecciones F y G. Determine las matrices asociadas con estas proyecciones via la base $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ de $\mathbb{C}^2$. Pruebe que $EF = F$, $FE = E$, $EG = 0$, $FG = G$, $GF = F$, pero GE no es una proyección. ¿Cuál de estas proyecciones es ortogonal si el producto escalar es $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle := \overline{x_1} x_2 + \overline{y_1} y_2$? ¿Hay algún producto escalar sobre $\mathbb{C}^2$ tal que E resulte ser una proyección ortogonal?

Problema 19: Sea A una matriz cuyo polinomio característico es $f(x) = (x - c_1)^{d_1} \ldots (x - c_k)^{d_k}$ con $\sum_{i=1}^{k} d_i = n$. ¿Cuál es la traza de A?

Problema 20: Calcule autovalores y autovectores de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -13 & 9 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Problema 21: Si los operadores A y B son autoadjuntos y C y D son unitarios, demuestre que:

a) $C^{-1} A\, C$ es autoadjunto;

b) $C^{-1} D\, C$ es unitario;

c) $i(AB - BA)$ es autoadjunto.

Problema 22: Dada la transformación de semejanza $A' = S^{-1} A S$, pruebe que:

a) $\mathrm{Tr}\,(A') = \mathrm{Tr}\,(A)$;

b) $\det([A']) = \det([A])$;

c) si A es autoadjunto y S unitario, entonces A' es autoadjunto;

d) si A es ortogonal y S ortogonal entonces A' es ortogonal;

e) si A es unitario y S unitario, entonces A' es unitaria.

Dada una función analítica f, es usual utilizar la notación $f(A)$, donde A es un operador linear, para representar al desarrollo en serie de Taylor de f "evaluado" en A:

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n .$$

Utilizando esta notación pruebe que:

f) $f(A') = S^{-1} f(A) S$;

g) $\det([e^A]) = e^{\mathrm{Tr}\, A}$.

Problema 23: Si los autovectores v_i correspondientes a los autovalores λ_i de la matriz A forman una base, pruebe que:

a) $\det([A]) = \prod_i \lambda_i$;

b) $\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_i \lambda_i$.

Problema 24: *Matrices de espín 1* Las matrices:

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son importantes en la descripción de parículas de espín 1 en *mecánica cuántica*. Calcule los autovalores de cada una de ellas y de la matrices $S^2 \equiv S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ y $\sinh(S_3)$.

Problema 25: *Operadores normales* Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión n y $N : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un operador normal, o sea $N^\dagger N = N N^\dagger$.

a) Vea que los autovectores de N son también autovectores de $N^\dagger$ y los correspondientes autovalores son los complejo-conjugados de los autovalores de N. Ayuda: calcule la norma de $(N^\dagger - \lambda^* I)u$ para $Nu = \lambda u$.

b) Pruebe que si u_1 y u_2 son dos autovectores correspondientes a diferentes autovalores de N, entonces son ortogonales entre sí.

c) N tiene un conjunto completo de autovectores ortogonales.

Problema 26: *Operadores Unitarios* Sea U un operador unitario de un espacio $\mathcal{V}$ de dimensión n.

a) Muestre que U es unitario (preserva productos escalares) si y solo si $UU^\dagger = I$.

b) Muestre que los autovalores de U tienen módulo uno.

c) Muestre que U tiene un conjunto ortogonal y completo de autovectores.

d) Muestre que existe un operador hermitiano, C, tal que $U = e^{iC}$. Ayuda: considere el operador definido en todo elemento de $\mathcal{V}$ por su acción en los autovectores de U: $Cu_j = -i\ln(\lambda_i)u_j$ donde u_j es un autovector de U con autovalor λ_j.

e) Muestre que si C es un operador hermitiano, entonces $U = e^{iC}$ es unitario.

Problema 27: Encuentre los autovalores y autovectores normalizados de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Problema 28: En una dada base $\{e_i\}$ de un espacio vectorial abstracto, una transformación lineal y un dado vector de dicho espacio quedan respectivamente determinados por:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Encuentre las representaciones matriciales de la transformación y del vector en una nueva base tal que la antigua queda representada por:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 29: Escriba la matriz A y el vector x en la base en la cual A es diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ i \\ b \\ -1 \end{pmatrix} .$$