Métodos Matemáticos de la Física

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/mmf.html

Guía 2 – Agosto de 2014

Problema 1: Halle los posibles valores de la constante a tal que la siguiente matriz sea unitaria:

$$\begin{pmatrix} a & \frac{i}{2} & \frac{a}{2}(2i-1) \\ ia & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{a}{2}(1-i) \\ a & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2}(2-i) \end{pmatrix}.$$

Problema 2: Si ϵ_{ijk} es el símbolo antisimétrico de Levi-Civita:
a) Demostrar que $\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$.
b) Calcular $\sum_{ij} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl}$
c) Dada la matriz M, calcular: $\sum_{ijk}\sum_{lmn} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}\mathsf{M}_{il}\mathsf{M}_{jm}\mathsf{M}_{kn}$

Problema 3: Mostrar que la fórmula:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i \, , \sum_{j=0}^{m} b_j\, x^j \right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{a_i\, b_j}{i+j+1}$$

define un producto interno del espacio de polinomios con coeficientes reales a $\mathbb{R}$. Restrinja el producto interno al subespacio de polinomios de grado menor o igual que N y halle la matriz de este producto interno respecto a la base $\{1, x, x^2, \cdots, x^N\}$.

Problema 4: Considere un tensor covariante simétrico arbitrario g_{ij}. Mediante g_{ij}, podemos definir una operación de diferenciación covariante. Demostrar que la derivada covariante de g_{ij} definida de esta forma se anula.

Problema 5: Consideremos el símbolo de Christoffel $\left\{ \begin{array}{c} i \\ jk \end{array} \right\}$ formado con la ayuda de un tensor covariante simétrico arbitrario g_{lm}. Demostrar que:

$$\left\{ \begin{array}{c} i \\ ik \end{array} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^k} \ln \sqrt{det\ \mathsf{g}}$$

Problema 6: Se definen las coordenadas α, β, γ mediante las relaciones:

$$x = \beta\gamma, \quad y = \alpha\gamma, \quad z = \alpha\beta$$

donde x, y, z son las coordenadas cartesianas. Dada una función arbitraria u, calcular $\nabla^2 u$ en función de las derivadas de u respecto de α, β, γ.

Problema 7: Se definen las coordenadas r, θ, ϕ mediante las relaciones:

$$\begin{aligned} x &= r\ sen\theta\ cos\phi \\ y &= r\ sen\theta\ sen\phi \\ z &= r\ cos\theta \end{aligned}$$

donde x, y, z son las coordenadas cartesianas. Dada una función arbitraria u, calcular $\nabla^2 u$ en función de las derivadas de u respecto de r, θ, ϕ.

Problema 8: Se definen las coordenadas α, β, γ por las relaciones:

$$x = \alpha\,\beta\,\gamma \ ; \ y = \alpha\,\beta\,\sqrt{1-\gamma^2} \ ; \ z = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \beta^2\right)$$

a) Calcule la métrica $g_{i,j}$. Son estas coordenadas ortogonales? Justifique.

b) Calcule $g^{i,j}$.

c) Calcule los índices de Christoffel

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \alpha\,\alpha \end{array} \right\} \ ; \ \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\,\gamma \end{array} \right\} \ ; \ \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ \gamma\,\gamma \end{array} \right\}$$

d) Calcule el operador Laplaciano en estas coordenadas.