Métodos Matemáticos de la Física

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/mmf.html

Guía 3 – Setiembre de 2014

Problema 1: Verifique que las siguientes ecuaciones diferenciales se reducen a ecuaciones diferenciales de variables separables:

a) $y' = f(ax + by + c)$, donde a, b y c son constantes;

b) $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

c) $y' = f\left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$, donde a_i, b_i, c_i son constantes.

Problema 2: Calcule las soluciones particulares de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables, que satisfacen las condiciones especificadas:

a) $(1 + e^x)\, y\, y' = e^x$, $\quad y(x = 0) = 1$

b) $y' \operatorname{sen} x = y \ln y$, $\quad$ b$_1$) $y(x = \pi/2) = e$
b$_2$) $y(x = \pi/2) = 1$

c) $x^3 \operatorname{sen} y\, y' = 2$, $\quad y(x \to \infty) = \pi/3$

Problema 3: Calcule la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales reducibles a ecuaciones diferenciales homogéneas:

a) $x + y - 2 + (x - y + 4)\, y' = 0$

b) $x + y + 1 + (2x + 2y - 1)\, y' = 0$

c) $(x^2 y^2 - 1)\, y' + 2x\, y^3 = 0$ $\quad$ (ayuda: Utilice el cambio de variable $y = z^\alpha$)

Problema 4: Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales dejando expresados los términos que no pueda calcular:

a) $y' + 2y = x^2 + 2x$ $\quad$ (ecuación lineal inhomogénea).

b) $x^2 y' + 2x^3 y = y^2 (1 + 2x^2)$ $\quad$ (ecuación de Bernoulli)

c) $2\, x\, y\, y' = 4x^2 + 3y^2$

d) $x\, y' + 6y = 3\, x\, y^{4/3}$

e) $2\, x\, e^{2y}\, y' = 3x^4 + e^{2y}$

Problema 5: Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales teniendo en cuenta si son diferenciales exactas o bien si existe un factor integrante:

a) $x\,(2\,x^2 + y^2) + y\,(x^2 + 2\,y^2)\, y' = 0$

b) $(x^2 + y) - x\, y' = 0$

c) $(x+y^2) - 2\,x\,y\,y' = 0$

Problema 6: Determine todas las curvas del plano tales que toda recta tangente a cada curva forma siempre con los ejes coordenados un triángulo de área $A = 2a^2$, siendo a una constante.

Problema 7: Calcule la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

a) $x^2\,y' + y^2 = x\,y\,y'$

b) $y' = \dfrac{x\,\sqrt{1+y^2}}{y\,\sqrt{1+x^2}}$

c) $y' = \dfrac{a^2}{(x+y)^2}$

d) $y' + y\,\cos x = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2x)$

e) $(1-x^2)\,y' - x\,y = x\,y^2$

f) $2\,x^3\,y' = 1 + \sqrt{1+4\,x^2\,y}$

g) $y'' + (y')^2 + 1 = 0$

h) $y'' = e^y$

i) $x\,(1-x)\,y'' + 4\,y' + 2\,y = 0$

j) $(1-x)\,y^2 - x^3\,y' = 0$

k) $x\,y' + y + x^4\,y^4\,e^x = 0$

l) $(1+x^2)\,y' + y = \arctan x$

m) $x^2\,(y')^2 - 2\,(x\,y-4)\,y' + y^2 = 0$ (soluciones general y singular)

n) $y\,y'' - (y')^2 - 6\,x\,y^2 = 0$

ñ) $x^4\,y\,y'' + x^4\,(y')^2 + 3\,x^3\,y\,y' - 1 = 0$

o) $x^2\,y'' - 2\,y = x$

p) $y''' - 2\,y'' - y' + 2\,y = \mathrm{sen}\,x$

q) $y'''' + 2\,y'' + y = \cos x$

r) $y'' + 3\,y' + 2\,y = \exp\left(e^x\right)$

s) $a^2\,(y'')^2 = \left(1+(y')^2\right)^3$

t) $y'' + \dfrac{2}{x}\,y' + y = \dfrac{1}{x}$

Problema 8: En la activación de una lámina de indio por un flujo constante de neutrones, el número N de átomos radiactivos obedece la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda\,N_s - \lambda\,N\ ,$$

donde N_s es el número constante que se alcanza luego de la "saturación". Calcule $N(t)$ si $N(t=0)=0$.

Problema 9: Encuentre la solución general de

$$A(x)\,y'' + A'\,y' + \frac{y(x)}{A(x)} = 0 \ ,$$

donde $A(x)$ es una función conocida y $y(x)$ es la incógnita.

Problema 10: Calcule la solución general de la ecuación

$$x\,y'' + 2\,y' + n^2\,x\,y = \mathrm{sen}(\omega x) \ .$$

Ayuda: Elimine el término en derivada primera.

Problema 11: Note que $y = x$ es una solución de la ecuación:

$$(1-x)\,y'' + x\,y' - y = (1-x)^2$$

si el segundo miembro se anula. Use este hecho para obtener la solución general de la ecuación dada.

Problema 12: Considere la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

en el intervalo $a \le x \le b$. Suponga que se conocen dos soluciones, $y_1(x)$ y $y_2(x)$, tales que

$$\begin{array}{ll} y_1(a) = 0 & \quad y_2(a) \neq 0 \\ y_1(b) \neq 0 & \quad y_2(b) = 0 \end{array}$$

Dé la solución de la ecuación:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x)$$

que obedece las condiciones $y(a) = y(b) = 0$, en la forma:

$$y(x) = \int_a^b G(x,x')\,f(x')\;\mathrm{d}x' \ ,$$

donde $G(x,x')$, la llamada función de Green, se construye sólo en términos de las soluciones y_1 y y_2 y asume diferentes formas funcionales para $x' < x$ y $x' > x$.
Ilustre este problema resolviendo:

$$y'' + k^2\,y = f(x); \quad y(a) = y(b) = 0$$