Métodos Matemáticos de la Física

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/mmf.html

Guía 4 – Octubre de 2014

Problema 1: Encuentre dos soluciones en forma de serie de potencias de la ecuación

$$y'' + y = 0 \; ; \;\; \infty < x < \infty \, .$$

Trunque las series en N terminos y grafiquela en el intervalo $[0, 2\pi]$ para $N = 1, \cdots, 10$ términos y comparelas con las soluciones exactas.

Problema 2: Sea la ecuación de Airy,

$$y'' - xy = 0 \; ; \;\; \infty < x < \infty \, .$$

a) Encuentre dos soluciones en forma de serie de potencias.
b) Encuentre una solución en potencias de $x - 1$.

Problema 3: La ecuación diferencial

$$y'' + \frac{2}{x}\, y' + \left[K + \frac{2}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right] y = 0 \; , \;\; 0 < x < \infty$$

aparece al plantear la ecuación de Schrödinger de un átomo hidrogeno. Encuentre todos los valores de K (los autovalores) que generan soluciones ϕ con $\lim_{x\to 0^+} \phi(x)$ finito.

Problema 4: Se busca la constante K de modo que la ecuación diferencial

$$y'' - \left[\frac{1}{4} + \frac{K}{x}\right] y = 0 \; , \;\; 0 < x < \infty$$

tenga una solución no trivial que se anula cuando $x \to 0$ y cuando $x \to \infty$.

Problema 5: ¿Para que valores de K es cierto que la ecuación diferencial

$$xy'' - 2xy' + (K - 3x)y = 0$$

tiene una solución acotada en $(0, \infty)$?

Problema 6: De las dos soluciones expresadas como serie de potencias de la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + \frac{3}{2} x\, y' + x\, y = 0 \, .$$

Problema 7: La ecuación diferencial de Bessel de orden cero es:

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \; .$$

La función de Bessel

$$J_o(x) \;=\; 1 - (x/2)^2 + \frac{1}{4}(x/2)^4 + \cdots$$

es una solución. Muestre que hay una segunda solución para $x \neq 0$ que tiene la forma

$$J_o(x) \ln(|x|) + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + \cdots$$

y encuentre los tres coeficientes A, B y C.

Problema 8: Considere la ecuación diferencial

$$x\, y'' + (2 - x)\, y' - 2\, y = 0 \; .$$

Dé dos soluciones, una regular y de valor 1 en el origen y la otra de la forma

$$\frac{1}{x} + A(x) \, \ln x + B(x) \; ,$$

donde $A(x)$ y $B(x)$ son regulares en $x = 0$. Dé los primeros tres términos de los desarrollos en serie de A y B.