Métodos Matemáticos de la Física

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/mmf.html

Guía 5 – Octubre de 2014

Problema 1: *Polinomios de Legendre.* La ecuación de Legendre es

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + \nu(\nu+1)y = 0\,.$$

a) Localice los puntos regular-singular de la ecuación.

b) Proponga una solución en serie de esta ecuación válida en el intervalo $[-1,1]$ y encuentre los valores de ν para los cuales una solución es un polinomio. Estos polinomios son conocidos como polinomios de Legendre y denotados por $P_l(x)$.

c) Pidiendo que $P_l(1) = 1\ \forall l$, muestre que la formula de Rodrigues para estos polinomios toma la forma

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\,.$$

d) Demuestre la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)\,P_{l'}(x)\,dx = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{ll'}\,.$$

e) Muestre que la función generatriz de estos polinomios es

$$G(x,h) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\,h^l = \frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}}.$$

f) Demuestre las relaciones de recurrencia

$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0 \quad ; \quad P_l(x) = P'_{l+1}(x) - 2x\,P'_l(x) + P'_{l-1}(x)\,.$$

g) Calcule $P_l(0)$, y $P'_l(1)\ \forall l \,\epsilon \mathbb{N}$.

h) Encuentre el desarrollo de la función signo,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ +1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

en serie de polinomios de Legendre,

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l\,P_l(x)$$

Problema 2: *Polinomios de Hermite.* La ecuación de Hermite es

$$y'' - 2xy' + 2\nu y = 0 \ ; \ \infty < x < \infty\,.$$

a) Localice los puntos regular-singular de la ecuación.

b) Proponga una solución en serie de esta ecuación y encuentre los valores de ν para los cuales una solución es un polinomio. Estos polinomios son conocidos como polinomios de Hermite y denotados por $H_n(x)$.

c) Muestre que la formula de Rodrigues para estos polinomios toma la forma

$$H_n(x) = C_n\,e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\,,$$

note que esto define polinomios en la variable $(2x)$, determine C_n pidiendo que $H_n = (2x)^n + O(x^{(n-2)})$.

d) Demuestre la relación de ortogonalidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,H_m(x)\,H_n(x)\,dx = 2^n\,n!\,\sqrt{\pi}\,\delta_{mn}\,.$$

e) Muestre que la función generatriz de estos polinomios es

$$G(x,h) \;=\; e^{2xh-h^2} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\,\frac{h^n}{n!}\,.$$

f) Demuestre las relaciones de recurrencia

$$H_{n+1}(x) \;=\; 2x\,H_n(x) \;-\; 2n\,H_{n-1}(x) \quad ; \quad H_n'(x) \;=\; 2n\,H_{n-1}(x)\,.$$

g) Evalue la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)e^{-x^2/2}\,.$$

Problema 3: *Funciones de Bessel.* La ecuación de Bessel es

$$x^2\,y'' \;+\; xy' \;+\; (x^2-\alpha^2)y \;=\; 0\,.$$

a) Localice los puntos regular-singular de la ecuación.

b) Mueste que el Wronskiano de dos soluciones de la ecuación de Bessel, y_1, y_2, tiene la forma

$$W(y_1,y_2) \;=\; \frac{cte.}{x}$$

c) Proponga una solución en serie en serie de potencias

$$J_\alpha(x) \;=\; x^r\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,x^n\,,$$

y de la expresión explícita de los c_n.

d) Verifique a partir del punto anterior que

$$J_{1/2}(x) \;=\; \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\sin x \quad ; \quad J_{-1/2}(x) \;=\; \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos x\,.$$

e) Pruebe que, para $\alpha = m\epsilon\mathbb{N}$, $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$.

f) Defina la función

$$Y_\alpha(x) \;=\; \frac{\cos\alpha\pi J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}\,,$$

Muestre que $Y_\alpha(x)$ es solución de la ecuación de Bessel, y que siempre es LI, mientras que $J_{-\alpha}$ lo es solo si α no es entero.

g) Muestre que la función generatriz de $J_m(x)$ es

$$G(x,h) \;=\; e^{x(h-1/h)/2} \;=\; \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)\,h^m\,.$$

h) Muestre que si $M_\alpha(x)$ es una solución de la ecuacion de Bessel, entonces cumple las siguientes relaciones de recurrencia:

$$M_{\alpha-1}(x) + M_{\alpha+1}(x) \;=\; \frac{2\alpha}{x}\,M_\alpha(x) \quad ; \quad 2\,M_\alpha'(x) \;=\; M_{\alpha-1}(x) - M_{\alpha+1}(x)$$

i) Muestre la relación de ortogonalidad

$$\int_a^b J_m(kx)\,J_m(lx)\,xdx \;=\; \frac{lxJ_m(kx)\,J_m'(lx) \;-\; kxJ_m'(kx)\,J_m(lx)\big|_a^b}{k^2-l^2} \quad ; \quad l,k\epsilon\mathbb{R}_+\,.$$