Métodos Matemáticos de la Física

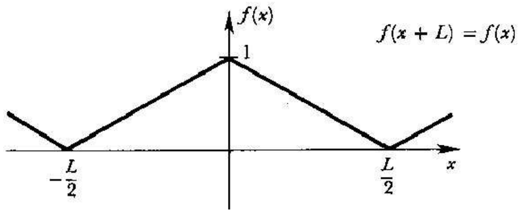
http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/mmf.html

Guía 6 – Octubre de 2014

Problema 1: Muestre que
$$\int_a^b f(x)\delta(g(x))dx = \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$
suponiendo que x_0 es la unica raíz de $g(x)$ en (a,b) y $g'(x_0) \neq 0$.

Problema 2: Verifique que
$$x^2\,\delta''(x) + x\,\delta'(x) \;=\; \delta(x)$$

Problema 3: Expanda la función mostrada en la figura en serie de Fourier.



Problema 4: sea $f(x) = e^{-x}$ para $0 \leq x \leq 1$.

a) Expanda $f(x)$ en serie de Fourier de la forma $\sum_n B_n \sin(n\pi x)$.

b) Expanda $f(x)$ en serie de Fourier de período 1.

Problema 5: Demuestre las siguientes propiedades de la Transformada de Fourier

a) Si $g(t) = \dot{f}(t)$ entonces $\mathcal{F}(g) = \imath\omega\mathcal{F}(f)$. Si $g(t) = tf(t)$ entonces $\mathcal{F}(g) = \imath\omega\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}(f)$.

b) $\mathcal{F}(f(t-t')) = e^{-\imath\omega t'}\mathcal{F}(f(t))$.

c) Convolución: si $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-t')f(t')dt'$ entonces $\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(K)\mathcal{F}(f)$.
Reciprocamente $\mathcal{F}(fg) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega\,')G(\omega-\omega')d\omega'$ donde $F = \mathcal{F}(f)$ y $G = \mathcal{F}(g)$.

d) Si $F = \mathcal{F}(f)$ entonces $\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(t) \mid^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mid F(\omega) \mid^2 d\omega$

e) $\mathcal{F}(f^*(t)) = F^*(-\omega)$.

f) Si $f(t)$ es par, $F(\omega) = F_c(\omega)$, si es impar $F(\omega) = -\imath F_s(\omega)$; donde F_c, F_s son la transformada coseno y la transformada seno.

g) $\mathcal{F}_c(f^{(n)}(t)) = -2f^{(n-1)}(0) + \omega\mathcal{F}_s(f^{(n-1)}(t))$
$\mathcal{F}_s(f^{(n)}(t)) = -\omega\mathcal{F}_c(f^{(n-1)}(t))$

h) $\int_0^{\infty} f(t)g(t)dt \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} F_s(\omega)G_s(\omega)d\omega \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} F_c(\omega)G_c(\omega)d\omega$.

Problema 6: (a) Sea la función $f(x)$ normalizada con T. de F. $\mathcal{F}(f) = F(p)$. Se define

$$\langle x^n \rangle \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mid f(x) \mid^2 dx \quad ; \quad \langle p^n \rangle \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} p^n \mid F(p) \mid^2 dp$$

$$(\Delta x)^2 = \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle \quad ; \quad (\Delta p)^2 = \left\langle (p - \langle p \rangle)^2 \right\rangle$$

Muestre que $(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{1}{2} \qquad \forall\, f(x)$.

(b) Encuentre la T. de F. de una Gaussiana normalizada centrada en $x = x_0$. Calcule $\Delta x \Delta p$ en este caso.

Problema 7: *Regla de suma de Poisson*

a) Sea la función $f(x)$ con T. de F. $\mathcal{F}(f) = F(k)$. Demuestre la fórmula de suma de Poisson:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\alpha) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{2\pi n}{\alpha}\right)$$

donde α =cte. real.

b) Use el punto a) para mostrar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha^2 n^2} \;=\; \frac{\pi}{\alpha}\coth\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$$

Problema 8: Calcule la transformada de Fourier de la función de onda de un electrón en el orbital 2p del átomo de hidrógeno:

$$\Psi(x) \;=\; \frac{1}{(32\pi a_0^5)^{1/2}} z e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

donde a_0 = radio de Bohr y z la coordenada cartesiana.

Problema 9: Un sistema lineal tiene como respuesta $G(\omega)e^{i\omega t}$ a una señal de entrada $e^{i\omega t}$, donde ω es arbitrario. Si la entrada tiene la forma particular:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-\lambda t} & (t > 0) \end{cases}$$

donde λ es una constante fija, la salida resultante es:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ (1 - e^{-\alpha t})e^{-\lambda t} & (t > 0) \end{cases}$$

donde α es otra constante fija.
a) Calcular $G(\omega)$.
b) Calcular la respuesta del sistema a la entrada $f(t) = A\delta(t)$.

Problema 10: Demuestre las siguientes propiedades de la Transformada de Laplace

a) $\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = s\mathcal{L}(f) - f(0)$
$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$.

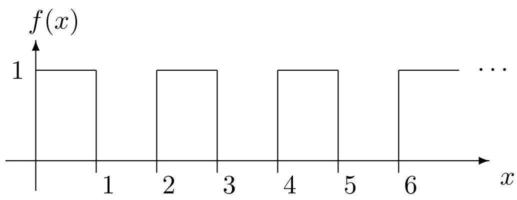
b) $\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{d\mathcal{L}(f(t))}{ds}$.

c) $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t')dt'\right) = s^{-1}\mathcal{L}(f(t))$.

d) Convolución: si $g(t) = \int_0^t K(t-t')f(t')dt'$ entonces $\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(K)\mathcal{L}(f)$.
Reciprocamente $\mathcal{L}(fg) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty}^{c+i\infty} F(z)G(s-z)dz$, donde $F = \mathcal{F}(f)$ y $G = \mathcal{L}(g)$.

Problema 11: Calcule la transformada de Laplace de las siguientes funciones:
(a) $f(t) = \sin(\alpha t)$. (b) $f(t) = \cos(\alpha t)$. (c) $f(t) = t^n$. (d) $f(t) = t^n e^{\alpha t}$.

Problema 12: Calcular la transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(x)]$ de la función dibujada a continuación:



Problema 13: Una función $f(x)$ tiene el siguiente desarrollo en serie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^n}{n!}$$

Escribir la función $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ en forma cerrada en términos de $f(x)$.

Problema 14: Utilizando la representación integral:

$$J_o(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x sen\theta)\, d\theta$$

calcular la transformada de Laplace de $J_o(x)$.

Problema 15: ¿De qué función es:

$$\frac{1}{(s^2+1)(s-1)}$$

la transformada de Laplace?

Problema 16: Tres nucleos radioactivos decaen sucesivamente en serie, de forma tal que los números $N_i(t)$ de cada tipo obedecen las ecuaciones:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \;\; ; \qquad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \;\; ; \qquad \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3$$

Si inicialmente $N_1 = N$, $N_2 = 0$, $N_3 = n$, calcular $N_3(t)$ utilizando transformadas de Laplace.

Problema 17: Transforme Laplace la ecuación diferencial

$t\ddot{x} - (4t+1)\dot{x} + (4t+2)x = 0$

y encuentre la solución que cumple $x(0) = 0\,;\; x(1) = 1$.