Métodos Matemáticos de la Física

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/mmf.html

Guía 7 – Noviembre de 2014

Problema 1: Muestre que en $\mathbb{R}^3$ se cumple:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -4\pi\, \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Problema 2: Considere un círculo de radio a con centro en el origen de coordenadas. Sean (r, ϕ) las coordenadas polares y (x, y) las correspondientes coordenadas rectangulares del plano. Calcule la solución del problema de Dirichlet (interior) para la ecuación de Laplace ($\nabla^2 u = 0$) con las siguientes condiciones de contorno:

a) $u(r = a) = A$

b) $u(r = a) = A\, \cos\phi$

c) $u(r = a) = A + B\, y$

d) $u(r = a) = A\, x\, y$

e) $u(r = a) = A + B\, \operatorname{sen}\phi$

f) $u(r = a) = A\, \operatorname{sen}^2\phi + B\, \cos^2\phi\,; \quad A,\, B$ ctes.

Problema 3: En el problema anterior considere condiciones de contorno de Neumann: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_c = f(\phi)$ (interior) para los siguientes casos particulares:

a) $f(\phi) = A$

b) $f(\phi) = A\, x$

c) $f(\phi) = A\,(x^2 - y^2)$

d) $f(\phi) = A\, \cos\phi + B$

e) $f(\phi) = A\, \operatorname{sen}\phi + B\, \operatorname{sen}^3\phi$

Identifique los problemas que no tienen solución única o aquellos donde la solución no depende "continuamente" de la condición de contorno.

Problema 4: Determine la distribución estacionaria de la temperatura dentro de la capa esférica $a < r < b$ si la esfera $r = a$ se mantiene a la temperatura T_1 y la esfera $r = b$ a la temperatura T_2.

Problema 5: Resuelva el problema de las oscilaciones transversales propias de una cuerda homogénea de longitud L si:

a) Los extremos de la cuerda están fijos rígidamente.

b) Los extremos de la cuerda están libres. Es decir $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ en los extremos de la cuerda. Esto tiene lugar cuando los extremos de la cuerda están sujetos mediante anillos (de masas despreciables), que deslizan sin rozamiento sobre barras paralelas.

c) Un extremo de la cuerda está fijo rígidamente y el otro libre.

d) Los extremos de la cuerda están fijos elásticamente, es decir que: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0,L} - h\, u|_{x=0,L} = 0.$

e) Un extremo de la cuerda está fijo rígidamente y el otro elásticamente.

f) Un extremo de la cuerda está fijo elásticamente y el otro está libre.

Problema 6: En los instrumentos musicales de cuerda percutida (por ejemplo, el piano) las oscilaciones transversales de la cuerda tensa se generan mediante un golpe, que le da a la cuerda una velocidad inicial sin desviación inicial. Si el martillo percutor es plano, rígido y tiene un ancho 2δ, el perfil de velocidad inicial de la cuerda estará dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) = \begin{cases} v_o & |x - x_o| < \delta \\ \\ 0 & |x - x_o| > \delta \end{cases}$$

suponiendo que el martillo golpea a una distancia x_o del extremo de la cuerda y que ésta tiene un largo L.

a) Determine las oscilaciones de la cuerda $u(x,t)$ para todo $t > 0$, suponiendo que $u_{tt} = c^2\, u_{xx}$.

b) Para la energía de la cuerda oscilando se tiene la expresión

$$E = \frac{1}{2}\int_0^L \rho\left(c^2 u_x^2 + u_t^2\right)\, \mathrm{d}x$$

donde la densidad $\rho = M/L$, si M es la masa de la cuerda. Calcule la energía asociada con cada modo de oscilación o "armónico".

c) Determine en qué puntos de la cuerda x_o la percusión no excita el m-ésimo modo de oscilación.

d) Bajo la razonable aproximación $\delta \ll L$, determine cuál es el armónico que más resuena (es decir que posee mayor energía) si se percute la cuerda a una distancia x_o de uno de sus extremos.

Problema 7: Calcule las oscilaciones propias de una membrana circular

a) con la frontera fija rígidamente;

b) con la frontera libre.

Problema 8: Calcule la frecuencia más baja de oscilación de una onda acústica en una esfera hueca de radio R. La condición de contorno es $\left.\dfrac{\partial \phi}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$ y ϕ obedece la ecuación de ondas homogénea.

Problema 9: Suponga que p es continuamente diferenciable en un intervalo $[a,b]$ donde no tiene ceros y que q es continua en este intervalo. Considere el operador $Lu := (p'u')' + qu$ para funciones dos veces continuamente diferenciables en $[a,b]$ y el problema de Sturm-Liouville $Lu = \lambda u$ con $u(a) = u(b) = 0$. Suponiendo que este último operador es invertible muestre que la función de Green es

$$G(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) u_n(t)}{\lambda_n}$$

donde $\{\lambda_n : \ n = 1, 2, \cdots\}$ son los autovalores de problema de Sturm-Liouville y $\{u_n : \ n = 1, 2, 3, \cdots\}$ las correspondientes autofunciones normalizadas, o sea $\int_a^b u_n(x)^2\, dx = 1$.
¿Que puede decir sobre el mismo tipo de problema con condiciones de contorno de otro tipo?

Problema 10: Calcule la función de Green para el problema

$$\mathcal{L}[y] = y'' + \frac{1}{4}y = f(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{1}$$

con condiciones de contorno $y(0) = y(\pi) = 0$,

a) resolviendo la ecuación $\mathcal{L}[G(x, x')] = \delta(x - x')$ con las condiciones de contorno apropiadas,

b) utilizando las autofunciones del problema de Sturm-Liouville asociado a (1).

En ambos casos calcule la solución de (1) para los casos $f(x) = \text{sen}(2x)$ y $f(x) = x/2$.

Problema 11: Considere la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

en el intervalo $a \le x \le b$. Suponga que se conocen dos soluciones, $y_1(x)$ y $y_2(x)$, tales que

$$\begin{array}{ll} y_1(a) = 0 & y_2(a) \neq 0 \\ y_1(b) \neq 0 & y_2(b) = 0 \end{array}$$

Dé la solución de la ecuación:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x)$$

que obedece las condiciones $y(a) = y(b) = 0$, en la forma:

$$y(x) = \int_a^b G(x, x')\, f(x')\, \mathrm{d}x' \,,$$

donde $G(x, x')$, la llamada función de Green, se construye sólo en términos de las soluciones y_1 y y_2 y asume diferentes formas funcionales para $x' < x$ y $x' > x$.
Ilustre este problema resolviendo:

$$y'' + k^2\, y = f(x); \quad y(a) = y(b) = 0$$

Problema 12: Use la solución fundamental o función de Green para la ecuación de difusión/calor en $(-\infty, \infty)$ para determinar la solución fundamental de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,,$$

en la semi-recta $(0, \infty)$ con condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ para $x > 0$ y condición de borde

a) de Dirichlet; $u(0, t) = 0$, $t \ge 0$.

b) de Neumann; $(\partial u/\partial x)(0, t) = 0$, $t \ge 0$.

Para ello (método de las imágenes), considere la extensión del problema a todo $(-\infty, \infty)$ tomando la extensión par o impar de f, según corresponda para el caso a) o b).

Describa un método de solución para las siguientes variantes inhomogeneas:

a) de Dirichlet; $u(0, t) = g(t)$, $t \ge 0$.

b) de Neumann; $(\partial u/\partial x)(0, t) = g(t)$, $t \ge 0$.

Problema 13: Pruebe que la solución de la ec. de difusión/calor inhomogenea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \ ,$$

en la recta real con condición inicial $u(x,0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, es

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t) f(y) \ dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} dy \ \Phi(x-y, t-s) F(y,s) \ ,$$

donde Φ es la solución fundamental (función de Green) del problema homogeneo.

Problema 14: En analogía con el problema 11 para la ec. de difusión/calor, considere la ec. de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ ,$$

en la semirecta $(0, \infty)$ con datos iniciales

$$u(x,0) = \phi(x) \ , \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \ , \ \ x > 0 \ ,$$

y condición de borde de Dirichlet (condición de reflexión en $x = 0$):

$$u(0,t) = 0 \ , \ \ t \geq 0 \ .$$

Use el método de las imágenes y la fórmula de d'Alembert para el problema de Cauchy de la ec. de ondas en la recta real, para obtener una expresión análoga para una solución.

Problema 15: Calcule la solución de la ecuación de Poisson en el plano:

$$\nabla^2 u(r, \phi) = 1$$

dentro del círculo de radio $r = a$ si $u(r = a) = 0$.

Problema 16: Se desea obtener soluciones de la ecuación de Laplace con condiciones de contorno de Dirichlet en el interior de un paralelepípedo de lados a, b y c en las direcciones x, y, z respectivamente

a) Resuelva en detalle la solucion general por el método de separación de variables.

b) De la solucion para el caso particular en que la cara $z = 0$ del paralelepípedo es mantenida a potencial V_0, mientras las otras 5 caras son mantenidas a potencial nulo.

c) De la solucion para el caso particular en que la cara $z = 0$ del paralelepípedo es mantenida a potencial V_0, la cara $x = 0$ a potencial V_1 y las otras 4 caras a potencial nulo.

Problema 17: La cantidad u satisface la ecuación de ondas homogénea dentro de un cilindro de radio a, con la condición de contorno $u = 0$ en las paredes del cilindro. En el extremo $z = 0$ se tiene que $u = u_o \, e^{-i\omega_o t}$; es decir, se están enviando ondas a lo largo del tubo con diferentes distribuciones espaciales (modos). Encuentre la velocidad de fase del modo fundamental como función de la frecuencia ω_o e interprete el resultado para pequeños valores de ω_o.

Problema 18: Encuentre el potencial electrostático **exterior** a una superficie esférica prolada, de radio menor a y radio mayor b, con la condicion de que el potencial sobre la superficie sea

a) $\Phi(\mu_0, \eta, \varphi) = V_0$. En este caso encuentre una expresión cerrada para el potencial.

b)

$$\Phi(\mu_0, \eta, \varphi) \;=\; \frac{V_0}{(1+\beta^2+2\beta\cos(\eta))^{1/2}} \quad ; \quad V_0,\, \beta \,>\, 0\,.$$

Donde μ, η, φ son coordenadas proladas ortogonales

$$x \;=\; \frac{c}{2}\sinh(\mu)\sin(\eta)\cos(\varphi) \quad ; \quad y \;=\; \frac{c}{2}\sinh(\mu)\sin(\eta)\sin(\varphi) \quad ; \quad z \;=\; \frac{c}{2}\cosh(\mu)\cos(\eta)$$

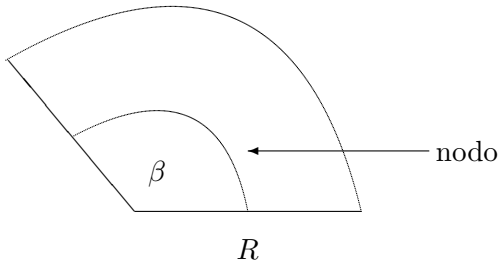
$$0 \leq \mu < \infty \quad ; \quad 0 \leq \eta \leq \pi \quad ; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

y la constante $c > 0$ define la unidad de longitud.
En estas coordenadas, φ es el angulo azimutal usual, y un esferoide prolado de eje menor a y eje mayor b es la superficie $\mu = \mu_0$ =cte., con $a = c\,\sinh(\mu_0)/2$; $b = c\,\cosh(\mu_0)/2$.
Sugerencia: Trabaje con las coordenadas $(\xi = \cosh(\mu), \delta = \cos(\eta), \varphi)$.

Problema 19: Encuentre las frecuencias de oscilación más bajas de un parche de tambor en forma de triángulo isósceles recto de lados a, a y $a\sqrt{2}$.

Problema 20: Considere un parche de tambor con la forma de un sector circular de radio R y ángulo β.

a) ¿Cuál modo es el ilustrado en la figura? Dé su respuesta para $\beta = \pi/2,\, \pi,\, 3\pi/2$.



b) Esquematice en un gráfico las frecuencias de los primeros seis modos como funciones de β.

Problema 21: La ecuación que describe las ondas elásticas en un medio isotrópico es:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla\cdot\vec{a} - \mu\nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{a}) = \rho\frac{\partial^2\vec{a}}{\partial t^2}$$

donde $\vec{a}$ mide los desplazamientos desde el equilibrio, ρ es la densidad, y λ y μ son las constantes elásticas del medio. Encuentre la frecuencia más baja de oscilación de una esfera elástica isotrópica de radio R, dado que:

a) $\vec{a}(\vec{x})$ es de la forma $f(r)\hat{e}_r$, y

b) la condición de contorno en $r = R$ es $\lambda\nabla\cdot\vec{a} + 2\mu\dfrac{\partial a_r}{\partial r} = 0$. Con el fin de calcular un número concreto, considere al final $\lambda = \mu$.

Problema 22: En el exterior de un cilindro infinitamente largo de radio a la función potencial $u(\vec{x},t)$ satisface la ecuación de ondas. El cilindro se encuentra dividido longitudinalmente, y sobre su superficie

$$u = \begin{cases} u_0 e^{-i\omega_0 t} & (0 < \phi < \pi) \\ -u_0 e^{-i\omega_0 t} & (\pi < \phi < 2\pi) \end{cases}$$

Calcule $u(\vec{x},t)$ fuera del cilindro si sólo existen ondas salientes para $r \gg a$.

Problema 23: Suponga que la densidad de neutrones n dentro del ^{235}U obedece la ecuación diferencial:

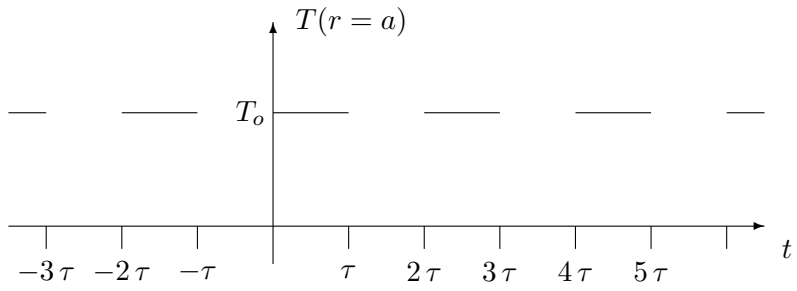
$$\nabla^2 n + \lambda n = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial n}{\partial t}$$

a) Encuentre el radio crítico R_o para el cual una esfera de ^{235}U con un radio igual o mayor a dicho valor es inestable, es decir que la densidad de neutrones en su interior crece exponencialmente con el tiempo.

b) Suponga dos hemisferios de ^{235}U que se encuentran en el límite de estabilidad. Si se juntan para formar una esfera, ésta resulta inestable, y se cumple que $n \sim e^{t/\tau}$. Encuentre la constante de tiempo τ de la explosión resultante.

Problema 24: Una esfera de radio R está uniformemente a temperatura $T = 0$. En el instante $t = 0$ se sumerge en un baño líquido a temperatura constante T_o. Calcule la subsiguiente distribución de temperatura $T(\vec{x},t)$ dentro de la esfera. [Utilice κ = conductividad térmica / (densidad $\times$ calor específico)].

Problema 25: La temperatura en una esfera homogénea de radio a obedece la ecuación de difusión $\nabla^2 T = (1/\kappa)\,(\partial T/\partial t)$, con κ constante. Por acciones externas, la temperatura de la superficie de la esfera es forzada a comportarse según lo ilustrado en la figura. Calcule la temperatura $T(t)$ en el centro de la esfera.



Las alteraciones se extienden para $t = \pm\infty$.

Problema 26: Encuentre los tres autovalores más pequeños de la ecuación de Schrödinger para una partícula confinada en una caja cilíndrica de radio a y altura h:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi \quad (\psi = 0 \text{ sobre las paredes}) \quad a \simeq h$$

Problema 27: Utilice la transformada coseno con respecto a y para calcular la distribución de temperatura estacionaria en un sólido semi-infinito ($x > 0$) cuando la temperatura en la superficie ($x = 0$) se mantiene constante e igual a la unidad para $-a < y < a$, y cero fuera de esa franja.

Problema 28: Un alambre recto de radio a se sumerge en un volumen infinito de líquido. Inicialmente el alambre y el líquido tienen temperatura $T = 0$. En $t = 0$ el alambre es súbitamente llevado a la temperatura T_o y a partir de entonces, mantenido a esa temperatura. Encuentre la transformada de Laplace $F(r, s)$ de la distribución de temperatura $T(r, t)$ resultante en el líquido.

Problema 29: Utilice transformadas de Fourier para calcular el movimiento de una cuerda estirada, infinitamente larga, con desplazamientos iniciales dados $y(x, 0) = \phi(x)$ y velocidad inicial nula. Los desplazamientos satisfacen la ecuación de ondas homogénea.

Problema 30: Las funciones de Green pueden calcularse para ecuaciones diferenciales homogéneas con condiciones de contorno inhomogéneas. Para ilustrar esto, considere la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 u(r, \theta) + k^2\, u(r, \theta) = 0$$

dentro del círculo de radio R, con la condición de contorno dada: $u(R, \theta) = f(\theta)$. La solución puede escribirse como:

$$u(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} G(\vec{x}, \theta')\, f(\theta')\, \mathrm{d}\theta' \; .$$

Calcule $G(\vec{x}, \theta')$.