Introducción a la Teoría de Fenómenos Críticos
Guía - Aproximaciones de Campo Medio

Calor específico del Modelo de Ising: Calcule la discontinuidad en $T = T_c$ del calor específico a campo nulo del modelo de Ising en la versión Curie-Weiss y en la aproximación de Bethe. Compare ambos resultados.

Para calcular C del $\mathcal{H} = -J\sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j - \mu_0 H\sum_i \sigma_i$ lo mas conveniente es calcular $U(T,H) = \langle \mathcal{H}_{int}\rangle = J\langle \sum_{\langle ij\rangle}\sigma_i\sigma_j\rangle$

$u = U/N$; $C = \dfrac{du}{dT}$

a) Comenzamos con C-W: $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle = \langle\sigma_i\rangle\langle\sigma_j\rangle = m^2 \Rightarrow$

$u = -\frac{1}{2} qJm^2 \Rightarrow u(T,0) = 0$ si $T > T_c = \frac{qJ}{k_B}$

Para $T < T_c$

$C(T) = \dfrac{du(T,0)}{dT} = -\frac{1}{2} qJ \dfrac{dm^2}{dT}$; como vimos en el teorico $m^2(T,0) \underset{t\to 0^-}{\sim} 3\left(\frac{T_c}{T} - 1\right) \Rightarrow \dfrac{dm^2}{dT} = -\frac{3}{2}\dfrac{qJ}{\frac{1}{2}k_B(T)^2} = -\dfrac{3T_c}{T^2}$

$$C = \begin{cases} \frac{3}{2}k_B\left(\frac{T_c}{T}\right)^2 & T < T_c \\ 0 & T > T_c \end{cases} \qquad \Delta C\big|_{T_c} = \frac{3}{2}k_B$$

Veamos ap. de Bethe. aqui $C(T)$ para $T < T_c$ debe calcularse numericamente (no lo hacemos) pero $\Delta C|_{T_c}$ se obtiene analítico

Calor específico en la ap. de Bethe

en este caso $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \langle \sigma_0 \sigma_1 \rangle$ $\forall$ par $\langle i,j \rangle \Rightarrow$

$$U = -\frac{N}{2} q J \langle \sigma_0 \sigma_1 \rangle \quad o \quad u = -\frac{1}{2} q J \langle \sigma_0 \sigma_1 \rangle$$

así debemos calcular $\langle \sigma_0 \sigma_1 \rangle$ a $h=0$

$$\langle \sigma_0 \sigma_1 \rangle = \frac{1}{Z_{B-P}} \sum_{\sigma_0 - \sigma_q} \sigma_0 \sigma_1 \, e^{(h_e + k\sigma_0) \sum_i^q \sigma_i} =$$

$$= \frac{1}{Z_{B-P}} \sum_{\sigma_0 \sigma_1} \sigma_0 \sigma_1 \, e^{(h_e + k\sigma_0)\sigma_1} \sum_{\sigma_2 - \sigma_q} \prod_{i=2}^{q} e^{(h_e + k\sigma_0)\sigma_i} =$$

$$= \frac{2^{q-1}}{Z_{BP}} \sum_{\sigma_0 \sigma_1} \sigma_0 \sigma_1 \, e^{(h_e + k\sigma_0)\sigma_1} \, ch^{q-1}(h_e + k\sigma_0) =$$

$$= \frac{2^q}{Z_{BP}} \sum_{\sigma_0} \sigma_0 \, ch^{q-1}(h_e + k\sigma_0) \, sh(h_e + k\sigma_0) =$$

$$= \frac{ch^{q-1}(h_e + k)\, sh(h_e + k) - ch^{q-1}(h_e - k)\, sh(h_e - k)}{ch^q(h_e + k) + ch^q(h_e - k)}$$

$\downarrow$

usamos la expresión de Z_{B-P} obtenida en el teórico. Para $T > T_c$ $h_e = 0 \Rightarrow$

$$\langle \sigma_0 \sigma_1 \rangle (T > T_c) = th\, k \Rightarrow c \neq 0 \text{ para } T > T_c.$$

Calor específico en la ap. de Bethe

a $h=0$ $\langle\sigma_0\sigma_1\rangle$ debe ser par en h_e, así, en un entorno del PC valdrá:

$$\langle\sigma_0\sigma_1\rangle = \langle\sigma_0\sigma_1\rangle\Big|_{h_e=0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\langle\sigma_0\sigma_1\rangle}{\partial h_e^2}\Big|_{h_e=0} h_e^2 + O(h_e^4) =$$

$$= \operatorname{th} k\left(1 + \frac{(q-1)}{\operatorname{ch}^2 k} h_e^2\right) + O(h_e^4) \Rightarrow$$

$$C\Big|_{\substack{h_e=0\\ T=T_c^+}} = -\frac{1}{2}qJ\frac{d\,\operatorname{th}k}{dT}\Big|_{T_c} - \frac{J}{2}q(q-1)\frac{\operatorname{sh}k_c}{\operatorname{ch}^3 k_c}\frac{dh_e^2}{dT}\Big|_{T_c}$$

La derivada la calculé con Mathematica® a partir de la ec. implícita para h_e^* dada en el teórico:

$$\frac{dh_e^2}{dT}\Big|_{T_c} = \frac{q-2}{4q}\ln\left(\frac{q}{q-2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{C}{k_B}\Big|_{T_c} = \begin{cases} \dfrac{q^2(q-2)}{8(q-1)^2}\ln^2\left(\dfrac{q}{q-2}\right) = C_> & T = T_c^+ \\[2ex] C_> + \dfrac{(q-2)^2}{8(q-1)}\ln^2\dfrac{q}{(q-2)} & T = T_c^+ \end{cases}$$

$$\Delta\frac{C}{k_B} = \frac{(q-2)^2}{8(q-1)}\ln^2\left(\frac{q}{q-2}\right)$$