

## Introducción a la Teoría de Fenómenos Críticos

[https://www.famaf.unc.edu.ar/~serra/ifc\\_2023.html](https://www.famaf.unc.edu.ar/~serra/ifc_2023.html)

Guía N° 1 - 14 de Marzo de 2023

### Problema 1: Gas de Van der Walls.

Considere la ecuación de Van der Walls para un fluido simple:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) (v - b) = RT$$

1. Calcule los parámetros críticos  $v_c$ ,  $T_c$ ,  $p_c$ .
2. Muestre que esta ecuación de estado puede escribirse en la forma

$$\pi = \frac{4(1+t)}{1+\frac{3}{2}\omega} - \frac{3}{(1+\omega)^2} - 1$$

donde

$$\pi \equiv \frac{p - p_c}{p_c}; \omega \equiv \frac{v - v_c}{v_c}; t \equiv \frac{T - T_c}{T_c}$$

3. Muestre que, en un entorno del punto crítico se obtiene la forma asintótica

$$\pi = 4t - 6t\omega - \frac{3}{2}\omega^3 + O(\omega^4, t\omega^2)$$

4. A partir de las isothermas de Van der Walls, corregidas por la construcción de Maxwell, obtenga una forma asintótica, válida en un entorno del punto crítico, para la curva de coexistencia, es decir, obtenga formas asintóticas para  $\omega_1 (< 0)$ ;  $\omega_2 (> 0)$  y  $\pi$  en función de  $t$  para  $t \rightarrow 0^-$ . Observe que se justifica a posteriori el truncamiento hecho en el punto anterior.
5. Muestre que, en el diagrama  $p - T$  la línea de coexistencia de fases y la curva definida por la condición  $v = v_c$  tienen igual tangente en el punto crítico.
6. Calcule los exponentes críticos  $\beta$ , asociado a la curva de coexistencia en el plano  $p - v$  y  $\delta$  asociado a la isoterma crítica en el plano  $p - v$ .
7. Calcule las siguientes formas asintóticas para la compresibilidad isotérmica

$$K_T(T, v = v_c) \sim Ct^{-\gamma}; \quad t \rightarrow 0^+$$

$$K_T(T = T_c, p) \sim \tilde{C}\pi^{-\tilde{\gamma}}; \quad \pi \rightarrow 0$$

de los valores de  $C$ ,  $\tilde{C}$ ,  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$ .

### Problema 2: Ecuación de Curie-Weiss de Ferromagnetismo

Considere la ecuación de Curie-Weiss

$$m = \tanh(\beta h + \beta \lambda m)$$

1. Obtenga las formas asintóticas

$$\chi(T, h = 0) \sim Ct^{-\gamma} ; t \rightarrow 0^+$$

$$\chi(T, h = 0) \sim C'(-t)^{-\gamma'} ; t \rightarrow 0^-$$

2. Obtenga la forma asintótica para  $\chi(T_c, h)$  para  $h \rightarrow 0$ .
3. Obtenga las formas asintóticas de la magnetización espontánea para  $T \rightarrow T_c^-$  y para  $T \ll T_c$  ( $T \rightarrow 0$ ).
4. Obtenga el exponente crítico  $\delta$  definido por la relación

$$h(T_c, m) \sim |m|^\delta \text{sign}(m) ; m \rightarrow 0.$$

**Problema 3:** *Desigualdades termodinámicas* Use argumentos termodinámicos para demostrar las siguientes desigualdades termodinámicas entre exponentes críticos:

1. desigualdad de Rushbrooke:

$$\alpha + 2\beta + \gamma \geq 2$$

2. desigualdad de Griffiths

$$\alpha' + \beta(1 + \delta) \geq 2$$