Introducción a la Teoría de Fenómenos Críticos
Guia 1

Marzo de 2010

Problema 1: Calcule la transformada de Legendre de una parábola, $y(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

Problema 2: *Funciones convexas y estabilidad termodinámica*
Pruebe que para una función $f(x)$ convexa se cumple:

1. $f" \geq 0$ si f es dos veces diferenciable.
2. $$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right)$$
3. Si f diferenciable
$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad ; \quad x_1 \, < \, x_2$$
4. Muestre que un potencial termodinámico obtenido como transformada de Legendre de la Energía interna es una función concava en los parámetros intensivos y convexa en los extensivos. Use esto para mostrar que $c_p; c_v$ y k_T son magnitudes no negativas.

Problema 3: *Gas de Van der Walls.*
Considere la ecuación de Van der Walls para un fluido simple:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)\,(v - b) \,=\, RT$$

1. Calcule los parámetros críticos v_c , T_c , p_c.
2. Muestre que esta ecuación de estado puede escribirse en la forma
$$\pi \,=\, \frac{4(1+t)}{1 + \frac{3}{2}\omega} \,-\, \frac{3}{(1+\omega)^2} \,-\, 1$$
donde
$$\pi \,\equiv\, \frac{p - p_c}{p_c} \;;\; \omega \,\equiv\, \frac{v - v_c}{v_c} \;;\; t \,\equiv\, \frac{T - T_c}{T_c}$$

3. Muestre que, en un entorno del punto crítico se obtiene la forma asimtótica

$$\pi \,=\, 4t \,-\, 6t\omega \,-\, \frac{3}{2}\omega^3 \,+\, O(\omega^4, t\omega^2)$$

4. A partir de las isotermas de Van der Walls, corregidas por la construcción de Maxwell, obtenga una forma asimtótica, válida en un entorno del punto crítico, para la curva de coexistencia, es decir, obtenga formas asimtóticas para ω_1 (< 0) ; ω_2 $(>)0$ y π en función de t para $t \to 0^-$. Observe que se justifica a posteriori el truncamiento hecho en el punto anterior.

5. Muestre que, en el diagrama $p - T$ la linea de coexistencia de fases y la curva definida por la condición $v = v_c$ tienen igual tangente en el punto crítico.

6. Calcule los exponentes críticos β , asociado a la curva de coexistencia en el plano $p - v$ y δ asociado a la isoterma crítica en el plano $p - v$.

7. Calcule las siguientes formas asimtóticas para la compresibilidad isotérmica

$$K_T(T, v = v_c) \,\sim\, Ct^{-\gamma} \;\;;\;\; t \to 0^+$$

$$K_T(T = T_c, p) \,\sim\, \tilde{C}\pi^{-\tilde{\gamma}} \;\;;\;\; \pi \to 0$$

de los valores de C , $\tilde{C}$, γ y $\tilde{\gamma}$.

Problema 4: *Ecuación de Curie-Weiss de Ferromagnetismo*
Considere la ecuación de Curie-Weiss

$$m \,=\, \tanh\left(\beta h \,+\, \beta\lambda m\right)$$

1. Obtenga las formas asimtóticas

$$\chi(T, h = 0) \,\sim\, Ct^{-\gamma} \;\;;\;\; t \to 0^+$$

$$\chi(T, h = 0) \,\sim\, C'(-t)^{-\gamma'} \;\;;\;\; t \to 0^-$$

2. Obtenga la forma asimtótica para $\chi(T_c, h)$ para $h \,\to\, 0$.

3. Obtenga las formas asimtóticas de la magnetización espontanea para $T \to T_c^-$ y para $T \ll T_c$ $(T \to 0)$.

Problema 5: *Desigualdades termodinámicas* Use argumentos termodinámicos para demostrar las siguientes desigualdades termodinámicas entre exponentes críticos:

1. desigualdad de Rushbrooke:

$$\alpha + 2\,\beta + \gamma \geq 2$$

2. desigualdad de Griffiths

$$\alpha' + \beta(1 + \delta) \geq 2$$