Introducción a la Teoría de Fenómenos Críticos
Guía 3 - *El modelo de Ising en* $d = 2$ *(y* 3*)*

Abril de 2023

Problema 1: *El gas de red.* Muestre que para un gas de red la densidad del fluido ρ, el calor específico C_v, la compresibilidad isotérmica K_T están relacionadas con m, χ_T y C_m del modelo de Ising de la siguiente manera:

$$\rho = \frac{1}{2}(1+m) \quad ; \quad \frac{4}{v^2} K_T = \chi_T \quad ; \quad \frac{1}{v} C_v = C_m \,.$$

Calcule la presión y el volumen específico en función de la temperatura y el "campo externo" del modelo de Ising equivalente. Muestre que, en dimensión 2 o mayor, en que el modelo de Ising presenta una fase ferromagnética, el gas de red reproduce correctamente la transición de fase gas-líquido para dimensiones mayores que uno. Grafique tres isotermas para $T =, >, < T_c$ en el plano $P - v$.

Problema 2: *El modelo de Ising y fermiones de Majorana*

1. Muestre que la matriz de transferencia unidimensional a campo nulo puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} e^{K} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K} \end{pmatrix} = \sqrt{2\, sh(2K)}\; e^{K^* \sigma_x} = g(K)\, e^{K^* \sigma_x}$$

donde $K = \beta J$, y K^* esta definida por la relación de dualidad, $th(K^*) = e^{-2K}$, y muestre que la función partición puede escribirse como

$$Z = Tr\left(V^M\right) = Tr\left(V_2^{1/2} V_1 V_2^{1/2}\right)^M$$

donde $N = M \times L$, y las matrices de $2^L \times 2^L$ son

$$V_1 = g(K)^L \exp\left(K^* \sum_{i=1}^{L} \tau_i^x\right) \quad ; \quad V_2 = \exp\left(K \sum_{i=1}^{L} \tau_i^z\, \tau_{i+1}^z\right).$$

donde las matrices de Pauli $2^L \times 2^L$, $\tau_1^\alpha = \sigma_\alpha \otimes I \ldots \otimes I$, etc. donde $\alpha = x, y, z$, e I es la identidad 2×2.

2. Defina los operadores de Majorana

$$\psi_1(j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tau_1^x \ldots \tau_{j-1}^x\, \tau_j^y \quad ; \quad \psi_2(j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tau_1^x \ldots \tau_{j-1}^x\, \tau_j^z \,.$$

a) verifique que $\psi_a(j)$ cumplen las relaciones de anticonmutación de los fermiones de Majorana,

$$\{\psi_a(j), \psi_b(k)\} \;=\; \delta_{a,b}\,\delta_{j,k} \quad ; \quad a,b = 1,2 \quad ; \quad j,k = 1,\ldots,L\,.$$

b) Verifique explícitamente las condiciones de contorno que cumplen los fermiones de Majorana. Defina la matriz $\tau_{prod} = \tau_1^x \ldots \tau_L^x$ y muestre que

$$[\tau_{prod}, \psi_1(j)\psi_2(j)] \;=\; 0 \;\;;\;\; [\tau_{prod}, \psi_1(j)\psi_2(j+1)] \;=\; 0$$

lo que implica que τ_{prod} y $V_1\,V_2$ pueden diagonalizarse simultáneamente, por lo que podemos trabajar en el subespacio U_+ con autovalores $+1$ de τ_{prod} imponiendo condiciones antiperiódicas de contorno a los operadores de Majorana, y en el subespacio U_- con autovalores -1 (ambos de dimensión $2^{L-1} \times 2^{L-1}$) imponiendo condiciones periódicas de contorno. Esto es, la condición de contorno periódica para spines le corresponden DOS condiciones de contorno de Majorana (periódica y antiperiódica).

3. Defina ahora los operadores fermiónicos "usuales"en el espacio recíproco (de Fourier) mediante la relación

$$\psi_a(j) \;=\; \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{q \geq 0} \left(e^{iqj} c_a(q) + e^{-iqj} c_a^\dagger(q) \right) \quad ; \quad a = 1,2$$

donde el vector de onda q esta definido por la condición $e^{iqL} = \pm 1$, donde el signo $+$ vale para condiciones periódicas y el $-$ para antiperiódicas.

Muestre usando esta definición que la matriz V puede escribirse como

$$V \;=\; g(K)^L \prod_{q \geq 0} V_2^{1/2}(q)\, V_1(q)\, V_2^{1/2}(q)\;,$$

donde

$$V_1(q) \;=\; e^{-2iK^* \left(c_1(q) c_2^\dagger(q) + c_1^\dagger(q) c_2(q) \right)} \;\;;\;\; V_2(q) \;=\; e^{2iK \left(e^{-iq} c_1(q) c_2^\dagger(q) + e^{iq} c_1^\dagger(q) c_2(q) \right)}\;.$$

4. Muestre que los autovalores de $V_2^{1/2}(q)\, V_1(q)\, V_2^{1/2}(q)$ son $\{1, 1, \lambda_+, \lambda_-\}$, donde $\lambda_\pm$ cumplen

$$\lambda_+ \times \lambda_- \;=\; 1 \;\;;\;\; \lambda_+ + \lambda_- \;=\; 2\frac{\cosh^2 2K}{\sinh 2K} - 2\cos q\,.$$

Este resultado nos permite llegar a la energía libre exacta que analizamos en el problema siguiente

Problema 3: *Análisis de la energía libre exacta del modelo de Ising en la red cuadrada*
Use la identidad

$$x \;=\; \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln\left(2\cosh x - 2\cos\omega\right) d\omega$$

para escribir la energía libre del modelo de Ising en la red cuadrada

$$-\beta\, f(T) \;=\; \frac{1}{2}\, \ln\left(2\sinh\left(2K\right)\right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \epsilon(q)\, dq$$

en la forma

$$-\beta\, f(T) \;=\; \ln\left(\sqrt{2}\cosh 2K\right) \;+\; \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2\;\ln\left[2 - \kappa(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\right]$$

donde

$$\kappa \;=\; \frac{2\sinh 2K}{\cosh 2K} \quad ; \quad K \;\equiv\; \beta J$$

1. Verifique que el punto crítico corresponde a $\kappa = 1$

2. Verifique la expresión asintótica

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 \, \frac{1}{2 - \kappa(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)} \;\sim\; -2\pi \ln(1-\kappa) \quad ; \quad \kappa \to 1^-$$

3. Use estos resultados para calcular las formas asintóticas de la energía interna y el calor específico para ; $t \to 0$ donde t es la temperatura reducida $t = \frac{T - T_c}{T_c}$

$$\frac{u}{J} \;\sim\; -\frac{8K_c}{\pi}\, t \,\ln|\,t\,|$$

$$\frac{c}{k_B} \;\sim\; -\frac{8K_c^2}{\pi}\, \ln|\,t\,|$$

Problema 4: Dado el modelo de Ising en la red cuadrada, a campo nulo y con interacción primeros vecinos J y segundos vecinos J_2, determine en que casos el modelo es frustrado y calcule entonces la entropía por sitio s a $T = 0$.

Problema 5: *Expansión de altas temperaturas del modelo de Ising en la red cuadrada*

La energía libre del modelo de Ising a campo nulo en la red cuadrada puede escribirse como

$$-\beta f \;=\; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln(\mathcal{Z}) \;=\; 2\ln(\cosh(K)) \,+\, \ln 2 \,+\, u^4 \,+\, 2u^6 \,+\, \frac{9}{2}u^8 \,+\, c_{10}u^{10} \,+\, O(u^{12})$$

donde $K \equiv \beta J \quad u \equiv \tanh K$

1. De los gráficos y el coeficiente c_{10} asociados a u^{10} .
2. Escriba la energía libre dada en el problema 3 utilizando la variable u, muestre que esta toma la forma

   $$-\beta f(T) \;=\; \ln\frac{1}{2}\cosh^2 K + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_2 \, \ln\Big((1+u^2)^2 - 2u(1-u^2)(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\Big) \,,$$

   y reobtenga de aquí la expansión hasta orden 10.
3. Continue la expansión hasta u^{40} (de la expresión anterior, **no** intente dibujar todos los diagramas necesarios!) y dé una estimación para K_c y el exponente crítico de la energía libre. Analice los errores porcentuales obtenidos.

Problema 6: *Expansión de altas temperaturas del modelo de Ising en la red FCC*

La expansión de altas temperaturas para la suceptibilidad a campo nulo del modelo de Ising en una red FCC es

$$\begin{aligned}\chi_0(T) \;=\;& 1 \,+\, 12\,u \,+\, 132\,u^2 \,+\, 1404\,u^3 \,+\, 14652\,u^4 \,+\, 151116\,u^5 \,+\\ & 1546332\,u^6 \,+\, 15734460\,u^7 \,+\, 159425580\,u^8 + \ldots\end{aligned}$$

donde $K \equiv \beta J \quad u \equiv \tanh K$ Asuma que existe una temperatura crítica u_c , y que cerca de esta la susceptibilidad toma la forma

$$\chi_0(T) \sim A \left(1 - \frac{u}{u_c}\right)^{-\gamma}$$

Use el método de la razón para encontrar un valor aproximado para la temperatura crítica y el exponente γ . Compare con valores reportados en la literatura.

Problema 7: Muestre que la función partición del modelo de Ising a campo nulo en redes duales cumple

$$\mathcal{Z}(K) = 2^{-N_D} \left(\frac{2}{\sinh(2\,K^*)}\right)^{qN/4} \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(K^*)$$

que en la red cuadrada se puede escribir en forma simétrica:

$$\frac{\mathcal{Z}(K)}{\sinh^{N/2}(2K)} = \frac{\mathcal{Z}(K^*)}{\sinh^{N/2}(2K^*)}\,,$$

mientras que para las redes Hexagonal de $2\,N$ sitios y triangular de N sitios es

$$\mathcal{Z}^H_{2N}(K) = \left(\frac{2}{\sinh^3(2\,K^*)}\right)^{N/2} \mathcal{Z}^T_N(K)\,.$$

Problema 8: *Transformación triángulo-estrella*

Utilizando la Transformación triángulo-estrella y las relaciones de dualidad calcule la temperatura crítica exacta del modelo de Ising con interacciones primeros vecinos en las redes triangular y hexagonal.

Problema 9: Muestre que la prueba usada para demostrar el teorema de Mermin y Wagner aplicado al modelo $X - Y$ falla en dimensiones mayores que dos.