Introducción a la Teoría de Fenómenos Críticos
https://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/ifc_2023.html
Guía N° 4 - Aproximaciones de Campo Medio

Mayo de 2023

Problema 1: *Una solución de campo medio del modelo de Ising.* Sea el Hamiltoniano de Ising ferromagnético en una red arbitraria:

$$\mathcal{H} \,=\, -J \sum_{<i,j>} \sigma_i\,\sigma_j \,-\, \mu H \sum_i \sigma_i$$

donde la primera suma es sobre todos los pares primeros vecinos, mientras la segunda es sobre todos los sitios de red.

1. Vea que el termino de interacción entre espines se puede escribir como
$$\sigma_i\,\sigma_j \,=\, (\sigma_i \,-\, \langle\sigma_i\rangle)\;(\sigma_j \,-\, \langle\sigma_j\rangle) \,+\, \sigma_i\,\langle\sigma_j\rangle \,+\, \langle\sigma_i\rangle\,\sigma_j \,-\, \langle\sigma_i\rangle\,\langle\sigma_j\rangle$$

2. Genericamente llamamos campo medio a aproximaciones que desprecian fluctuaciones. En este caso, las fluctuaciones de los espines estan descritas en el primer término de la expresión anterior. Ademas, por invarianza traslacional $\langle\sigma_i\rangle \,=\, m \;;\; i = 1,\cdots N$. Muestre que podemos escribir entonces un Hamiltoniano campo medio como
$$\mathcal{H}_{cm} \,=\, -Jqm \sum_i \sigma_i \,+\, \frac{q}{2} NJm^2 \,-\, \mu H \sum_i \sigma_i$$
donde q es la coordinación de la red = número de primeros vecinos de un sitio arbitrario ($q = 2d$ para una red hipercúbica en d dimensiones).

3. Muestre que la magnetización por spin m obedece la ecuación fenomenológica de Curie-Weiss de ferromagnetísmo, $m \,=\, \tanh\left[\beta(\lambda m \,+\, \mu H)\right]$, con $\lambda \,=\, qJ$. Muestre que la temperatura crítica viene dada por $k_B T_c \,=\, q\,J$. Note que este modelo predice ferromagnetismo en $d = 1$ mientras que la solución exacta muestra que esto no es asi, de argumentos que expliquen este resultado.

4. Muestre que si aproxima el efecto de toda la red sobre un sitio arbitrario como un campo efectivo $H_{ef} = H + cte.\, m$ tambien se obtiene la ecuación de Curie-Weiss.

Problema 2: *Calor específico del Modelo de Ising*

Calcule y grafique el calor específico a campo nulo del modelo de Ising en la versión Curie-Weiss y en la aproximación de Bethe. Compare ambos resultados. Muestre que C es discontinuo en $T = T_c$ y de el valor de la discontinuidad $\Delta C(T_c)$ para ambos modelos.

Problema 3: *La aproximación de Bethe-Peierls*

Bethe y Peierls propusieron (en forma independiente) una mejora al simple campo medio del problema anterior. Consideramos el modelo de Ising con interacción primeros vecinos en una red de coordinación q y elegimos arbitrariamente un sitio "central" que llamaremos sitio 0, y tratamos en forma exacta su interacción con sus q primeros vecinos, reemplazando el resto de la red por la acción de un campo efectivo, así, el Hamiltoniano será

$$\mathcal{H}_{BP} \,=\, -J\,\sigma_0 \sum_{i=1}^{q} \sigma_i \,-\, \mu_0 H\,\sigma_0 \,-\, \mu_0 H_{eff} \sum_{i=1}^{q} \sigma_i$$

donde el campo efectivo debe determinarse por la condición de consitencia $m = \langle\sigma_i\rangle \;;\; i = 0,\cdots,q$.

1. Calcule la función Partición Z_{BP}. De aquí en más simplifique sus cuentas trabajando a campo externo nulo.

2. Calcule la probabilidad de que un spin dado tome el valor $\sigma_i = 1$ (note que solo hay que calcular $P(\sigma_0 = 1)$ y $P(\sigma_1 = 1)$).

3. Exija que se cumpla la condición $P(\sigma_0 = 1) = P(\sigma_1 = 1)$ (que es equivalente a pedir que la magnetización no dependa del sitio) y obtenga una ecuación para el campo efectivo.

4. Use esta ecuación para calcular la temperatura crítica de este modelo. Compare su resultado con el obtenido en el problema 1 y con la solución exacta.

Problema 4: *Modelo de Blume-Capel - Aproximación Variacional*
Considere el modelo de Blume-Capel en una red de coordinación q:

$$\mathcal{H} \, = \, -J \sum_{<i,j>} s_i s_j \, + \, D \sum_i s_i^2 \, - \, H \sum_i s_i$$

donde $s_i \, = \, 0, \pm 1$, $D, J, H > 0$.

1. Utilize el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_0 \, = \, -\eta \sum_i s_i \, + \, D \sum_i s_i^2$$

y la desigualdad variacional de Bogoliubov para obtener una expresión aproximada de la energía libre.

2. Obtenga una funcional $\Psi(T, H; m)$ tal que

$$f(T, H) \, = \, \min_m \, \Psi(T, H; m)$$

y verifique que m coincide con la magnetización del sistema en la aproximación que estamos considerando.

3. Obtenga, a campo nulo, una expansión para $\Psi(T, H = 0; m)$ en potencias de m

$$\Psi(T, H = 0; m) \, = \, A_0 \, + \, A_2 m^2 \, + \, A_4 m^4 \, + \, A_6 m^6 + ...$$

4. Considere el diagrama de fases a campo nulo ($D/J vs. T \, = \, 1/(\beta J)$). Obtenga una expresión para la linea de segundo orden y localize el punto tricrítico.

5. Grafique el diagrama de fases a campo nulo para coordinación q=4, incluyendo la linea de transición de primer orden (que debe calcularse haciendo una construcción de Maxwell).

Problema 5: *Modelo de Blume-Capel - Versión Curie-Weiss*
Considere la versión Curie-Weiss del modelo de Blume-Capel

$$\mathcal{H} \, = \, -\frac{J}{2N} \sum_{i,j} s_i s_j \, + \, D \sum_i s_i^2 \, - \, H \sum_i s_i$$

donde $s_i \, = \, 0, \pm 1$, $D, J, H > 0$.

1. Obtenga una forma asintótica para la función partición en el $\lim N \to \infty$, y muestre que la energía libre puede escribirse como

$$f(T,H) = \min_{m} \Psi(T,H;m)$$

donde la variable m puede identificarse con la magnetización.

2. Compare la expresión de $\Psi(T,H;m)$ con la obtenida en el problema anterior.

Problema 6: *Modelo de Ising en la red de Bethe*

1. Calcule los exponentes críticos β y δ del Modelo de Ising en la red de Bethe. compare con los exponentes clásicos, discuta el resultado.

2. Muestre que en el limite $q \to \infty$; $J \to 0$; $q\,J = \alpha =$ constante finita, la ecuación de estado de la red de Bethe se reduce a la de Curie-Weiss.

Problema 7: *Polímeros en la red de Bethe*

Calcule la temperatura crítica de polimerización para el modelo de polímeros lineales (caminatas auto y mutuamente excluyentes) en la red de Bethe. Para esto recuerde que, dado el mapeo con el modelo n-vectorial, sabemos que la transición de fase ocurre a campo "magnetico" nulo. Esto corresponde en el modelo de polímeros a la no existencia de cadenas con extremos en el volumen interior, por lo que puede asumir que todos los polímeros tienen ambos extremos en sitios ubicados en la superficie.

Problema 8: *Exponentes críticos en la teoría de Landau*

Use la teoría fenomenológica de Landau para calcular Los exponentes críticos clásicos $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$ y δ para

1. Un punto crítico.

2. Un punto tricrítico.