Introducción a la Teoría de Fenómenos Críticos
Guia 4 - *Aproximaciones de Campo Medio*

Mayo de 2010

Problema 1: *Una solución de campo medio del modelo de Ising* Sea el Hamiltoniano de Ising ferromagnético en una red arbitraria:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{<i,j>} \sigma_i \sigma_j - \mu H \sum_i \sigma_i$$

donde la primera suma es sobre todos los pares primeros vecinos, mientras la segunda es sobre todos los sitios de red.

1. Vea que el termino de interacción entre espines se puede escribir como

$$\sigma_i \sigma_j = (\sigma_i - \langle\sigma_i\rangle)(\sigma_j - \langle\sigma_j\rangle) + \sigma_i \langle\sigma_j\rangle + \langle\sigma_i\rangle \sigma_j - \langle\sigma_i\rangle\langle\sigma_j\rangle$$

2. Genericamente llamamos campo medio a aproximaciones que desprecian fluctuaciones. En este caso, las fluctuaciones de los espines estan descritas en el primer término de la expresión anterior. Ademas, por invarianza traslacional $\langle\sigma_i\rangle = m$; $i = 1, \cdots N$. Muestre que podemos escribir entonces un Hamiltoniano campo medio como

$$\mathcal{H}_{cm} = -Jqm \sum_i \sigma_i + \frac{q}{2} N J m^2 - \mu H \sum_i \sigma_i$$

donde q es la coordinación de la red = número de primeros vecinos de un sitio arbitrario ($q = 2d$ para una red hipercúbica en d dimensiones).

3. Muestre que la magnetización por spin m obedece la ecuación fenomenológica de Curie-Weiss de ferromagnetísmo que vimos en Termo I:

$$m = \tanh\left[\beta(\lambda m + \mu H)\right]$$

con $\lambda = qJ$. Muestre que la temperatura crítica viene dada por $k_B T_c = q\,J$. Note que este modelo predice ferromagnetismo en $d = 1$ mientras que la solución exacta muestra que esto no es asi, de argumentos que expliquen este resultado.

4. Calcule la energía interna y el calor específico a campo nulo. Muestre que este ultimo es discontinuo en $T = T_c$, de el valor de la discontinuidad $\Delta C(T_c)$.

Problema 2: *Modelo de Blume-Capel - Aproximación Variacional*

Considere el modelo de Blume-Capel en una red de coordinación q:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{<i,j>} s_i s_j + D \sum_i s_i^2 - H \sum_i s_i$$

donde $s_i = 0, \pm 1$, $D, J, H > 0$.

- Utilize el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_0 \,=\, -\eta \sum_i s_i \,+\, D \sum_i s_i^2$$

  y la desigualdad variacional de Bogoliubov para obtener una expresión aproximada de la energía libre.

- Obtenga una funcional $g(T, H; m)$ tal que

$$g(T, H) \,=\, \min_m g(T, H; m)$$

  y verifique que m coincide con la magnetización del sistema en la aproximación que estamos considerando.

- Obtenga, a campo nulo, una expansión para $g(T, H = 0; m)$ en potencias de m

$$g(T, H = 0; m) \,=\, A_0 \,+\, A_2 m^2 \,+\, A_4 m^4 \,+\, A_6 m^6 + ...$$

- Considere el diagrama de fases a campo nulo ($D/J vs.T \,=\, 1/(\beta J)$). Obtenga una expresión para la linea de segundo orden y localize el punto tricrítico.

- Grafique el diagrama de fases a campo nulo para coordinación q=4, incluyendo la linea de transición de primer orden (que debe calcularse haciendo una construcción de Maxwell).

Problema 3: *Modelo de Blume-Capel - Versión Curie-Weiss*

Considere la versión Curie-Weiss del modelo de Blume-Capel

$$\mathcal{H} \,=\, -\frac{J}{2N} \sum_{i,j} s_i s_j \,+\, D \sum_i s_i^2 \,-\, H \sum_i s_i$$

donde $s_i \,=\, 0, \pm 1$, $D, J, H > 0$.

- Obtenga una forma asintótica para la función partición en el $\lim N \to \infty$, y muestre que la energía libre puede escribirse como

$$g(T, H) \,=\, \min_m g(T, H; m)$$

  donde la variable m puede identificarse con la magnetización.

- Compare la expresión de esta funcional con la obtenida en el problema anterior. Compare el comportamiento crítico de ambas aproximaciones.

Problema 4: *Exponentes críticos en la teoría de Landau*

Use la teoría fenomenológica de Landau para calcular

- Los exponentes críticos clásicos $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \delta, \nu, \nu'$ y η.

- Los exponentes tricríticos clásicos $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$ y δ.

Problema 5: *Exponentes críticos del Modelo de Ising en la red de Bethe*

Calcule los exponentes críticos β y δ del Modelo de Ising en la red de Bethe. compare con los exponentes clásicos, discuta el resultado.