Introducción a la Teoría de Fenómenos Críticos

https://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/ifc_2023.html

Guía N° 5

Junio de 2023

Problema 1: *Funciones homogeneas*

1. Demostrar que $f(x,y)$ es una función homogenea generalizada si y solo si $f(x,y) = y^p F(\frac{x}{y^q})$, donde $F(z) = f(z,1)$.

2. Demostrar que si $f(x,y)$ es una función homogenea generalizada entonces $\partial_x f$ y $\partial_y f$ tambien lo son.

3. *Propiedades de escala de la transformada de Legendre.*
   (a) Sea $\psi(u)$ la transformada de Legendre de $g(x)$, $\phi(u)$ la transformada de Legendre de $f(x)$ y λ una constante positiva, muestre que
   - si $f(x) = \lambda\, g(x) \;\Rightarrow\; \phi(u) = \lambda\, \psi(u/\lambda)$.
   - si $f(x) = g(\lambda\, x) \;\Rightarrow\; \phi(u) = \psi(u/\lambda)$.

   (b) Demostrar que si $f(x,y)$ es una función homogenea generalizada, la transformada de Legendre $g(x,u)$, donde
   $$u(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x ,$$
   es tambien una función homogenea generalizada.

4. *Hipótesis de escala y exponentes críticos.* Asuma que la energía libre del modelo de Ising es, en cualquier red regular, una funcion homogenea generalizada de T y H. En el curso se obtuvo para la red cuadrada $\alpha = 0_{log}$, $\beta = 1/8$. De el valor de los exponentes a_t, a_H, γ, δ, ν, η. En $d = 3$ los exponentes no se conocen exactamente, pero una reciente evaluación por MC arroja $\beta = 0.3250(2)$ $\gamma = 1.2356(8)$, calcule los demas exponentes y compare los mismos para $d = 2, 3, 4$.

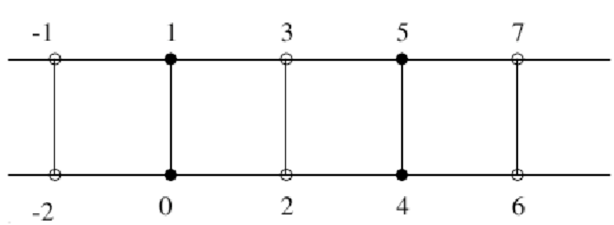
Problema 2: *Grupo de Renormalización: el método de Decimación*

Considere el modelo de Ising con interacción primeros vecinos (campo externo nulo) en una red "tipo escalera" como se muestra en la figura. Se quiere utilizar el método de decimación sumando sobre los sitios con círculos abiertos. Al realizar la operación de grupo de renormalización obtendra una proliferación de interacciones, sin embargo este es un ejemplo donde el espacio de Hamiltonianos $V_{\mathcal{H}}$ tiene dimension finita.

1. Encuentre la dimensión de $V_{\mathcal{H}}$, y escriba explicitamente un Hamiltoniano general en $V_{\mathcal{H}}$.

2. Escriba las ecuaciones de grupo de renormalización.

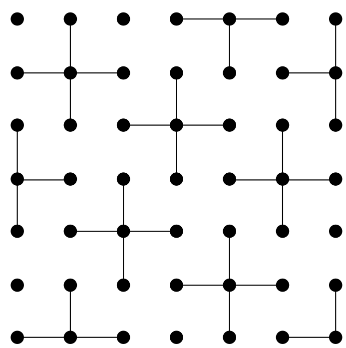
3. Compruebe que $T = 0$ y $T = \infty$ son puntos fijos, muestre que el primero es inestable y el segundo es estable. Justifique de aqui la no existencia de transición de fase a temperatura finita.



Problema 3: *Grupo de Renormalización: el método de Niemeijer y van Leeuwen*

1. Sea el modelo de Ising con interacción entre primeros vecinos y campo externo homogeneo. Utilizando el método de la expansion en cumulantes de Niemeijer y van Leeuwen calcule la temperatura crítica y los exponentes críticos ν, α, β, γ y δ para la red cuadrada, en primer orden, utilizando los bloques de 5 sitios mostrados en la figura.

2. Calcule todos los exponentes críticos $d = 2$ en esta aproximación, usando esta aproximación para la red triangular (y_t, y_h calculados en clase) y exactos. Compare los resultados.



Problema 4: *Escaleo para sistemas finitos* Considere el modelo de Ising en la red cuadrada. Estime la temperatura crítica y el exponente ν utilizando escaleo para sistemas finitos para sistemas de $M \times L$, con $M \to \infty$ y PBC utilizando los tamaños $L = 1$, 2 para

1. Condiciones períodicas de contorno en la direccion L.

2. Condiciones libres de contorno en la direccion L.

Compare ambos casos entre sí y con la solución exacta. Comente los resultados.
Nota: No crea que esto es tan fantástico: Para $L = 2, L' = 3$ los resultados, comparados con el exacto, empeoran!