Problema 1: *Transformada de Fourier y operador inversión.* Definimos la transformada de Fourier como

$$(\mathcal{F}f)(\vec{k}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, f(\vec{x})\, d^dx$$

y su inversa (que cumple $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = I$)

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, f(\vec{k})\, d^dk$$

donde d es la dimensión del espacio. El operador inversión Π se define por

$$(\Pi f)(\vec{x}) \;=\; f(-\vec{x})\;.$$

Pruebe que

$$\Pi^2 \;=\; I \;\;;\;\; \mathcal{F}^{-1} \;=\; \Pi\,\mathcal{F} \;=\; \mathcal{F}\,\Pi \;\;;\;\; \mathcal{F} \;=\; \Pi\,\mathcal{F}^{-1} \;=\; \mathcal{F}^{-1}\,\Pi$$

$$\mathcal{F}^2 \;=\; (\mathcal{F}^{-1})^2 \;=\; \Pi \;\;;\;\; \mathcal{F}^4 \;=\; (\mathcal{F}^{-1})^4 \;=\; I$$

Problema 2: Dada

$$\phi(k) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int e^{-ikx}\psi(x)\, dx$$

Demuestre que

$$\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{d}^n\psi(x)}{\mathrm{d}x^n}\right) \;=\; (ik)^n\phi(k)\,,$$

$$\mathcal{F}(x^n\psi(x)\,) = \left(i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\right)^n \phi(k)$$

y la fórmula generalizada de Parseval-Plancherel

$$\int \psi_1^*(x)\psi_2(x)\, dx \;=\int \phi_1^*(k)\,\phi_2(k)\;\; dk.$$

Problema 3: Si $\psi(x) = e^{-x^2/2}$, pruebe que $\phi(k) = e^{-k^2/2}$ utilizando el siguiente método: Vea que $\psi(x)$ satisface la ecuación $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x)\psi(x) = 0$. De las propiedades de la transformada de Fourier vea qué equación satisface $\phi(k)$. Encuentre la solución general de esta ecuación. Determine la constante de integración usando la identidad de Parseval-Plancherel o alguna propiedad elemental de las transformadas de Fourier.

Problema 4: Todas las integrales que necesitará en este problema son gaussianas. Muestre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\alpha t^2 + \beta t\right\}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, \exp\left\{\frac{\beta^2}{4\alpha}\right\},\quad Re(\alpha) > 0\;.$$

Función de onda gaussiana. Considere la función

$$\psi_{a,\sigma}(x) = N \exp\left\{-\,\frac{(x-a)^2}{4\sigma^2} + ik_o x\right\} \quad ,\quad a \text{ real, } k_o \text{ real y } \sigma > 0\;.$$

a) Determine N para que $\varphi_{a,\sigma}$ esté normalizada ($\int |\psi_{a,\sigma}(x)|^2\, \mathrm{d}x = 1$). Suponga que esta función normalizada es la función de onda de una partícula y calcule el valor esperado de la posición

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, |\psi_{a,\sigma}(x)|^2\, \mathrm{d}x$$

b) Determine la transformada de Fourier de esta función de onda

$$\phi_{a,\sigma}(k) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \psi_{a,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

c) Calcule el valor esperado del momento

$$\langle p \rangle = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} k\, |\phi_{a,\sigma}(k)|^2\,\mathrm{d}k$$

y la dispersión asociada.

d) ¿Cuánto vale el producto de las dispersiones calculadas?

e) Suponga que la partícula es libre y tiene masa M. Determine la evolución temporal de la función de onda. Repita los cálculos anteriores (valores esperados, dispersiones, etc.) y discuta el comportamiento temporal.

f) Calcule la densidad de corriente de probabilidad para este paquete gaussiano y verifique que se satisface la ecuación de continuidad.

Problema 5: *Relación de incerteza entre el ancho de banda y la duración de una señal.* Suele decirse que las relaciones de incerteza son características de la mecánica cuántica. Quien se haya ocupado del análisis y procesamiento de señales temporales sabe que esto no es cierto. Considere una señal $t \to f(t)$, por ejemplo la amplitud de una corriente eléctrica, o de una señal sonora, etc. Si $\widehat{f}$ es la transformada de Fourier de f,

$$\widehat{f}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

la fórmula de inversión

$$f(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \widehat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

exhibe a f como superposición de oscilaciones puras $t \to e^{i\omega t}$ de frecuencia $\omega/(2\pi)$. Es un hecho matemático que $|f|$ y $|\widehat{f}|$ no pueden estar ambas muy concentradas (o sea tomar valores apreciablemente distintos de cero en regiones pequeñas) a la vez. Si

$$\langle t \rangle_f = \frac{\int t |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}{\int |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$$

y

$$\langle \omega \rangle_f = \frac{\int \omega |\widehat{f}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}{\int |\widehat{f}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}$$

denotan los valores esperados (o promedio) del tiempo y de la frecuencia respectivamente, las respectivas dispersiones

$$(\Delta t)_f^2 = \langle (t - \langle t \rangle_f)^2 \rangle_f = \frac{\int (t - \langle t \rangle_f)^2 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}{\int |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$$

y

$$(\Delta \omega)_f^2 = \langle (\omega - \langle \omega \rangle_f)^2 \rangle_f = \frac{\int (\omega - \langle \omega \rangle_f)^2 |\widehat{f}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}{\int |\widehat{f}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}$$

satisfacen

$$(\Delta t)_f (\Delta \omega)_f \geq 1/2\ . \tag{1}$$

de banda efectivo de la misma, no se puede limitar arbitrariamente el ancho de banda y la duración de una señal simultáneamente. Para demostrar la desigualdad (1), se pueden seguir los siguientes pasos:

a) Reemplazando f por $(\int |f(t)|^2\,\mathrm{d}t)^{-1/2} f$ se puede suponer que f está normalizada ($\int |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = 1$). Esto tiene como consecuencia que también $\widehat{f}$ está normalizada (la transformación de Fourier preserva la normalización, o en otras palabras es una isometría).

b) Usando la fórmula distribucional

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx}\,\mathrm{d}x = 2\pi\,\delta(y)\ ,$$

convénzase que

$$\langle\omega\rangle_f = -i\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)\,\frac{df(t)}{dt}\,\mathrm{d}t\ \ ,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\left|\widehat{f}(\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{df(t)}{dt}\right|^2\mathrm{d}t\ .$$

c) Integrando por partes se ve (tenga en cuenta la integrabilidad de $|f(t)|^2$ y de $t^2|f(t)|^2$) que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{df(t)}{dt}f^*(t) + \frac{df^*(t)}{dt}f(t)\right)\mathrm{d}t = 0\ ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\left(\frac{df(t)}{dt}f^*(t) + \frac{df^*(t)}{dt}f(t)\right)\mathrm{d}t = -1\ .$$

d) Si para un número complejo λ arbitario,

$$f_\lambda(t) = (t - \langle t\rangle_f)f(t) + \lambda(\,\mathrm{d}f/\,\mathrm{d}t)(t) - i\lambda\langle\omega\rangle_f f(t)\ ,$$

observe que, trivialmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_\lambda(t)|^2\,\mathrm{d}t \geq 0\ ,\ \text{para todo } \lambda \text{ complejo}\ ,$$

y verifique que

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_\lambda(t)|^2\,\mathrm{d}t = (\Delta t)_f^2 + \lambda^2(\Delta\omega)_f^2 - \lambda\ ,\ \text{si } \lambda \text{ es real.}$$