Mecánica Cuántica I

Guía 3 – Marzo de 2005

Problema 1: Calcule el valor medio y la varianza para las distribuciones exponencial y gaussiana.

Problema 2: *Ensanchamiento del paquete de ondas de una partícula libre.* Considere una partícula libre que se mueve a lo largo del eje x. Muestre lo siguiente:

a)

$$\frac{d\langle x^2\rangle}{dt} = A(t) \qquad A(t) = \frac{i\hbar}{m}\int x\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) dx$$

b)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2\hbar^2}{m^2}\int \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\, dx = B = cte.$$

c)

$$\langle x^2\rangle = \langle x^2\rangle_0 + A(0)t + \frac{B}{2}t^2$$

Problema 3: *La ecuación de Schrödinger en la representación momento*

a) Muestre que la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa m bajo la acción de un potencial $V(x)$ en la representación momento puede escribirse como

$$i\hbar\frac{\partial\Phi(p,t)}{\partial t} = \left[\frac{p^2}{2m} + V\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\Phi(p,t)$$

si el potencial es analítico en $x = 0$.

b) Escriba la ecuación de Schrödinger en la representación momento para el caso particular de un oscilador armónico unidimensional de frecuencia ω_0 y masa m tal que $V(x) = \frac{1}{2}\omega_0^2 m x^2$. Compárela con la correspondiente representación posición y relacione las soluciones en ambas representaciones sin utilizar la transformada de Fourier.

Problema 4: Demuestre la desigualdad de Schwarz:

$$|\langle\Phi,\Psi\rangle| \leq \sqrt{\langle\Phi,\Phi\rangle\,\langle\Psi,\Psi\rangle}$$

Para ello, primero observe que $\langle\Phi+\lambda\Psi,\Phi+\lambda\Psi\rangle \geq 0$ para cualquier número complejo λ. Luego elija λ de tal manera que la última desigualdad se reduzca a la desigualdad de Schwarz.

Problema 5: Dados dos operadores lineales A y B, y α un número complejo, demuestre, usando la definición de operador adjunto, que

a) $(\alpha\, A + B)^\dagger = \alpha^*\, A^\dagger + B^\dagger$

b) $(\,A\,B)^\dagger = B^\dagger\, A^\dagger$

c) $(\,A^{-1})^\dagger = \left(A^\dagger\right)^{-1}$

d) $\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$

Problema 6: Dados dos operadores hermitianos A y B, ¿qué puede decir sobre la hermiticidad de los siguientes operadores? : AB, $AB + BA$, $[A, B]$, $i\,[A, B]$.

Problema 7: Muestre que para el operador exponencial se cumplen las siguientes propiedades:

a) $e^{(t+s)A} = e^{tA}\, e^{sA}$.

b) Si A y B conmutan entonces $e^{A+B} = e^{A}\, e^{B}$.

c) $\frac{de^{tA}}{dt} = Ae^{tA}$.

Problema 8:

a) Muestre que cualquier operador lineal puede ser escrito como combinación lineal de dos operadores autoadjuntos.

b) Muestre que si A es un operador hermitiano, el operador $U = e^{iA}$ es unitario.

Problema 9: Dado los operadores A, B, C demuestre que

a) $[A, A] = 0$.

b) $[A, B] + [B, A] = 0$.

c) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$.

d) $[A, B\,C] = [A, B]C + B[A, C]$.

e) $[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$ (identidad de Jacobi).

f) $e^{A}Be^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots$.

g) Si A y B conmutan con sus conmutadores, entonces:

i) $[A, B^{N}] = NB^{N-1}[A, B]$; $[A^{N}, B] = NA^{N-1}[A, B]$.

ii) $e^{A}\, e^{B} = e^{A+B+[A,B]/2} = e^{B}\, e^{A}\, e^{[A,B]}$.

Problema 10:

a) Muestre que los operadores momento lineal ($\vec{p} = -i\hbar\nabla$) y momento angular ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$) son hermitianos.

b) Calcule los conmutadores $[p_i^2, f(\vec{r})]$ y $[L_i, L_j]$ $\;; i, j = x, y, z$