Mecánica Cuántica I

Guía 5 - Abril 2005

Problema 1: Mostrar que en una dimensión el espectro de energía de los estados ligados es siempre no degenerado.

Problema 2: Si los autovalores discretos de una ecuación de Schrödinger unidimensional están ordenados de manera creciente ($E_1 < E_2 < E_3 < \cdots$), las autofunciones correspondientes se ordenarán de acuerdo a un orden creciente de nodos, donde la n-ésima autofunción tendrá $n-1$ nodos.
Mostrar que entre dos nodos consecutivos de la n-ésima autofunción habrá al menos un nodo de la $n+1$-ésima autofunción.

Problema 3: Determine las autoenergías del espectro discreto para una partícula moviéndose en el potencial

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2 x}$$

con $V_0 > 0$.

Sugerencia: en la ecuación de Schrödinger

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{V_0}{\cosh^2 x}\right)\psi = 0$$

haga el cambio de variable $\xi = \tanh x$ y use la notación $\varepsilon = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$ y $\frac{2mV_0}{\hbar^2} = s(s+1)$ para llegar a la ecuación de los polinomios asociados de Legendre. Luego puede llevarlo a la forma hipergeométrica haciendo la sustitución

$$\psi = \left(1-\xi^2\right)^{\varepsilon/2} w(\xi)$$

y temporariamente $u = \frac{1}{2}(1-\xi)$.

Allí estudie las soluciones físicamente aceptables para $x = \pm\infty$ ($\xi = \pm 1$) de donde obtendrá la condición de cuantización.

Problema 4: Considere un oscilador armónico descripto por $H = p^2/2m + kx^2/2$, en una aproximación semiclásica, donde x es considerado como un parámetro ajustable x_0 y el momento p se lo puede tomar como $\hbar/x_0$ (de acuerdo con el principio de incerteza). De este modo la energía semiclásica puede ser minimizada con respecto a x_0. Compare esta energía con el valor exacto del oscilador armónico cuántico. Compare también x_0 con la desviación cuadrática media de la solución mecánico–cuántica.

Problema 5: *Tratamiento analítico del problema del oscilador armónico.*

a) Verifique que, cuando el potencial al que se somete una partícula de masa m es $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ (donde $\omega > 0$ es constante), la ecuación de Schrödinger puede ser escrita como

$$\psi'' + (2\varepsilon - y^2)\,\psi = 0\ ,$$

donde $y = x(m\omega/\hbar)^{1/2}$ y $\varepsilon = E/\hbar\omega$, siendo E el correspondiente autovalor del hamiltoniano.

b) Para el límite $y \to \pm\infty$, vea que la ecuación diferencial resultante $\psi'' - y^2\psi = 0$ admite soluciones del tipo $\exp(-y^2/2)$. Analice entonces para la solución general (siempre en el mismo límite)

$$\psi(y) = u(y)\, e^{-y^2/2}$$

qué condiciones deben imponerse a $u(y)$.

c) Una alternativa para resolver la ecuación diferencial resultante para $u(y)$ es proponer

$$u(y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \, y^k$$

y buscar la relación que debe haber entre los coeficientes C_k. Agrupando los términos de mismo orden en y, encuentre la relación de recurrencia

$$C_{k+2} = C_k \, \frac{2k + 1 - 2\varepsilon}{(k+2)(k+1)}$$

d) Analice nuevamente los límites $y \to \pm\infty$ para ver que los únicos valores permitidos para ε son $n + 1/2$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$, obteniendo así el espectro de energías.

e) Vea entonces que la ecuación diferencial mencionada en c) para cada n es satisfecha por el polinomio de Hermite H_n. Derive la expresión general para las autofunciones

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi \, \hbar \, 2^{2n} n!^2} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar} \right) H_n \left[\left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/2} x \right]$$

Problema 6: Para los autoestados ψ_m y ψ_n del oscilador armónico calcule $\langle \psi_m, a^\dagger \psi_n \rangle$ y $\langle \psi_m, a\psi_n \rangle$. Evalúe $\Delta X \cdot \Delta P$ para el estado ψ_n .

Problema 7: Dada $\Psi(x, 0)$, la función de onda del oscilador armónico 1D en $t = 0$:

a) Encontrar su evolución temporal.

b) Calcular $\langle x \rangle_t$ en función del tiempo.

c) Calcular $\langle p_x \rangle_t$ en función del tiempo.

d) Verificar que $\langle p_x \rangle_t = m \frac{d\langle x \rangle_t}{dt}$

e) Mostrar que $\langle x \rangle_t = \langle x \rangle_0 \cos(\omega t) + \frac{\langle p_x \rangle_0}{m\omega} \sin(\omega t)$.

Problema 8: *Estados coherentes.* Los autoestados del operador a se definen por la relación:

$$a \, \varphi_\alpha \; = \alpha \varphi_\alpha \quad ; \quad \text{donde } \alpha \text{ es un número complejo.}$$

a) Encuentre una expresión para los autoestados del operador a como combinación lineal de los autoestados ψ_n del oscilador armónico de masa m y frecuencia ω. Muestre que el operador $a^\dagger$ no tiene autoestados.

b) Muestre que estos estados pueden escribirse como

$$\varphi_\alpha \; = \; \exp\left(-\frac{1}{2} \, |\alpha|^2 \right) \, \exp\left(\alpha \, a^\dagger \right) \psi_0 \; = \; \exp\left(-\frac{1}{2} \, (|\alpha|^2 - \alpha^2) \right) \exp\left(-i \sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}} \alpha \hat{p} \right) \psi_0$$

c) Use los resultados del problema anterior para mostrar que estos estados son estados coherentes (de incerteza mínima) para los operadores posición y momento. Calcule la evolución temporal segun el Hamiltoniano del oscilador armónico para un estado coherente y para la relación de incerteza correspondiente. Compare con la evolución de un paquete de incerteza mínima para una partícula libre.

d) Muestre que la expresión de los estados coherentes en la representación coordenada está dada por la función de onda

$$\psi(x,t) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} e^{i\phi(t)} \exp\left\{ -\frac{m\omega}{2\hbar}[x - q(t)]^2 + i\frac{p(t)x}{\hbar} \right\}$$

donde $p(t)$ y $q(t)$ son, respectivamente, el momento y la posición de un oscilador armónico clásico de masa m y frecuencia angular ω. Calcule el valor de ϕ sabiendo que $\psi(x,t)$ es solución de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico cuántico asociado.

e) Calcule el valor esperado de la energía del oscilador armónico y su dispersión para un estado coherente.

Problema 9: Calcule $(\psi_0, \exp(igx)\psi_0)$ en el estado fundamental del oscilador armónico, siendo g una constante. Relacione este resultado con $(\psi_0, x^2\psi_0)$.

Problema 10:*El potencial periódico de Kronig-Penney.* Considere una partícula bajo la acción de un potencial periódico descripto por:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x - na < b \\ V_o & b \leq x - na < a \end{cases}$$

con n entero.

a) Encuentre la matriz $B(\epsilon)$ que relaciona las amplitudes de onda en x y $x - a$.

b) Grafique (con ayuda de computadoras si es necesario) las bandas permitidas para la energía tomando $b = a/2$, $U_o = 100/a^2$ y $U_o = 10/a^2$, y también tomando $b = 3a/4$, $U_o = 100/a^2$ y $U_o = 10/a^2$.

Problema 11:*El peine de Dirac.* Dado un potencial periódico construído con una secuencia de funciones delta de Dirac a una distancia a entre ellas:

$$V(x) = V_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x + na)$$

a) Determine las bandas de energía para este potencial.

b) Use el resultado del problema anterior tomando límite para $(a-b) \to 0$, $V_o \to \infty$, manteniendo $(a - b)V_o$ constante y compare con lo obtenido en a).