Mecánica Cuántica I

Guía 6 – Abril de 2005

Problema 1: La traza de una matriz está definida como la suma de los elementos de su diagonal $Tr\,(\mathbf{A}) = \sum_i A_{ii}$. Muestre que: $Tr(\mathbf{AB}) = Tr(\mathbf{BA})$, y que la traza de una matriz es invariante ante un cambio unitario $\boldsymbol{e}_i \to U\boldsymbol{e}_i$ de base.

Problema 2:*Matrices de espín 1.* Calcular los autovalores de cada una de las matrices siguientes:

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad S_2 = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad S_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y de la matrices $S^2 \equiv S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ y $\sinh(S_3)$ (para este ultimo cálculo muestre que $S_i^3 = S_i$).

Problema 3: Tome la primera de las matrices anteriores y encuentre una base donde la matriz sea diagonal, exprese luego el vector con componentes $(1, 0, 1)$ en la nueva base.

Problema 4: *Operadores normales* Sea $N : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador normal, o sea $N^\dagger N = NN^\dagger$.

a) Vea que los autovectores de N son también autovectores de $N^\dagger$ y los correspondientes autovalores son los complejo-conjugados de los autovalores de N. Ayuda: calcule la norma de $(N^\dagger - \lambda^* I)u$ para $Nu = \lambda u$.

b) Pruebe que si u_1 y u_2 son dos autovectores correspondientes a diferentes autovalores de N, entonces son ortogonales entre sí.

c) Si el espacio $\mathcal{H}$ es de dimensión finita entonces N tiene un conjunto completo de autovectores ortogonales.

d) Muestre que si la dispersión $\sqrt{\langle f, N^2 f\rangle - \langle f, Nf\rangle^2}$ de N con respecto a un vector de estado f (normalizado) es cero, y N es autoadjunto, entonces el estado es un autovector de N.

Problema 5: *Operadores Unitarios (dimensión finita)* Sea U un operador unitario de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión finita.

a) Muestre que U es unitario (preserva productos escalares) si y solo si $UU^\dagger = I$.

b) Muestre que los autovalores de U tienen módulo uno.

c) Muestre que U tiene un conjunto ortogonal y completo de autovectores.

d) Muestre que existe un operador hermitiano, C, tal que $U = e^{iC}$. Ayuda: considere el operador definido en todo elemento de H por su acción en los autovectores de U: $Cu_j = -i\ln(\lambda_i)u_j$ donde u_j es un autovector de U con autovalor λ_j.

e) Muestre que si C es un operador hermitiano, entonces $U = e^{iC}$ es unitario.

Problema 6: Si A y B son operadores lineales autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ entonces la relación de incerteza es

$$(\Delta_\psi A)(\Delta_\psi B) \geq \frac{1}{2}|\langle\psi, [A, B]\psi\rangle|\ , \quad \psi \in \mathcal{H}\ , \quad \|\psi\| = 1$$

donde $(\Delta_\psi A)^2 = \langle\psi, A^2\psi\rangle - \langle\psi, A\psi\rangle^2 = \langle\psi, (A - \langle\psi, A\psi\rangle)^2\psi\rangle = \|(A - \langle\psi, A\psi\rangle)\psi\|^2$ es la dispersión cuadrada del valor esperado de A en el estado ψ. Demuestre que se cumple la igualdad si y sólo si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

a) ψ es autovector de A o de B;

b) ψ no es autovector ni de A ni de B pero

$$(A - \langle\psi, A\psi\rangle)\psi = i\frac{\langle\psi, i[A, B]\psi\rangle}{2(\Delta_\psi B)^2}(B - \langle\psi, B\psi\rangle)\psi\ .$$