

Problema 1. Probar que \vec{p} es el generador de traslaciones infinitesimales.

Problema 2.

- Pruebe que \vec{r} , \vec{p} , \vec{L} son operadores vectoriales y r^2 y p^2 son operadores escalares.
- Pruebe que si \vec{A} , \vec{B} son operadores vectoriales, entonces $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es un operador escalar.
- Pruebe que para que un operador A conmute con todas las componentes de un operador momento angular, es suficiente que conmute con dos de ellas.

Problema 3.

- Escriba las componentes cartesianas del operador momento angular orbital $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -i\hbar\vec{r} \times \nabla$ y de los operadores L_+ , L_- y L^2 en coordenadas esféricas.
- Use que las autofunciones de L^2 y L_z tienen la forma $Y_l^m(\theta, \varphi) = \Theta_{l,m}(\theta) \exp(im\varphi)$ para encontrar Y_l^l , sabiendo que $L_+ Y_l^l = 0$. Muestre que todas las autofunciones de L^2 pueden ser obtenidas de esta manera.
- Suponga que l puede tomar valores semienteros, calcule entonces $Y_{1/2}^{1/2}$ como se describe en el inciso (b), y $Y_{1/2}^{-1/2}$ utilizando L_- . Luego calcule $Y_{1/2}^{-1/2}$ a partir de la ecuación $L_- Y_{1/2}^{-1/2} = 0$ y muestre que arroja resultados contradictorios. Esto puede tomarse como argumento de la ausencia de valores semienteros para el momento angular orbital.

Problema 4. Considere las matrices de spin de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Muestre que el operador $\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ cumple las relaciones de conmutación de un operador momento angular.

Problema 5. Mostrar que para un sistema en el autoestado $|lm\rangle$ del operador L_z , el valor medio de la componente del operador momento angular orbital a lo largo de una dirección z , que forma un ángulo θ con el eje z , es igual a $m \cos \theta$.

Problema 6. Mostrar que en un autoestado $|lm\rangle$ del operador L_z , la mayor precisión en la medición de las componentes L_x y L_y se obtiene cuando $|m| = l$.

Problema 7. Sea P el operador paridad, tal que su acción sobre cualquier función $f(r, \theta, \phi)$ está dada por

$$Pf(r, \theta, \phi) = f(r, \pi - \theta, \phi + \pi)$$

Mostrar que $[P, \vec{L}] = 0$ y, utilizando este resultado, mostrar que los armónicos esféricos Y_l^m tienen paridad definida, la cual depende sólo del número cuántico l .

Problema 8. Una partícula interactúa con un campo externo de manera tal que el Hamiltoniano está dado por

$$H = \alpha L_x \quad ; \alpha > 0,$$

En $t = 0$ su estado está dado por

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0\rangle_z + |1, 1\rangle_z)$$

donde el miembro de la derecha está expresado en términos de las autofunciones $|l, m\rangle_z$ comunes de L^2 y L_z , correspondiendo el primer índice al autovalor de L^2 en tanto que el segundo a L_z .

a) Encuentre el espectro de energía para este Hamiltoniano.

b) Conociendo que

$$L_+ |l, m\rangle_z = \hbar \sqrt{(\ell - m)(\ell + m + 1)} |l, m + 1\rangle_z$$

$$L_-|\ell, m\rangle_z = \hbar\sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}|\ell, m-1\rangle_z$$

donde $L_z|\ell, m\rangle_z = \hbar m|\ell, m\rangle_z$, utilice algún argumento para establecer que

$$J_+|\ell, m_x\rangle_x = \hbar\sqrt{(\ell-m_x)(\ell+m_x+1)}|\ell, m_x+1\rangle_x$$

$$J_-|\ell, m_x\rangle_x = \hbar\sqrt{(\ell+m_x)(\ell-m_x+1)}|\ell, m_x-1\rangle_x$$

donde $J_\pm \equiv L_y \pm iL_z$ y $L_x|\ell, m_x\rangle_x = \hbar m_x|\ell, m_x\rangle_x$.

c) Expresar $|\psi(0)\rangle$ en la base $|\ell, m_x\rangle_x$ y calcule $|\psi(t)\rangle$ para todo t .

d) Calcule las probabilidades de medir: energía cero, energía distinta de cero y $L_x = \hbar$, para todo tiempo.

Problema 9. Considere una partícula de masa μ restringida a moverse en una circunferencia de radio a . Muestre que $H = L_z^2/2\mu a^2$. Resuelva el problema de autovalores de H e interprete la degeneración.

Problema 10. Para un estado representado por la función de onda

$$\psi = Ne^{-\alpha r^2}(x+y)z \quad \alpha > 0,$$

a) determine la constante de normalización N en términos del parámetro α ;

b) calcule los valores esperados para L y L^2 ;

c) calcule las varianzas para estas cantidades.

Problema 11. *El oscilador armónico bidimensional* Considere una partícula de masa μ que sólo puede moverse en el plano x - y , bajo la acción de un potencial $V(x, y) = (\mu\omega^2/2)(x^2 + \alpha y^2)$ ($\alpha > 0$)

a) Encuentre las autofunciones y los autovalores para el Hamiltoniano.

b) Para $\alpha = 1$, muestre que $[H, L_z] = 0$ y reduzca el problema de autovalores de H al de la ecuación diferencial para la función de onda radial $R(r)$.

c) Examine la ecuación para $r \rightarrow 0$ y muestre que

$$R(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r^{|m|}$$

con m entero. Analizando el límite $r \rightarrow \infty$, verifique que puede escribirse

$$R(r) = r^{|m|} \exp(-\mu\omega r^2/2\hbar) u_m(r).$$

d) Realizando las sustituciones $\epsilon = E/\hbar\omega$, $y = (\mu\omega/\hbar)^{1/2}r$, muestre que debe satisfacerse la siguiente ecuación diferencial:

$$u_m'' + \left[\left(\frac{2|m|+1}{y} \right) - 2y \right] u_m' + (2\epsilon - 2|m| - 2)u_m = 0.$$

e) Escribiendo $u_m(y) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell y^\ell$, halle la relación de recurrencia entre $C_{\ell+2}$ y C_ℓ . Demuestre que ℓ debe ser necesariamente par. Infiera entonces que los valores permitidos para la energía son $E_n = (n+1)\hbar\omega$, con $n = 0, 1, 2, \dots$

f) Para un dado n , ¿cuáles son los valores permitidos de $|m|$? A partir de esta información muestre que la degeneración del nivel n es $n+1$.

g) Escriba las autofunciones normalizadas completas para $n = 0, 1$.

Problema 12. Considere un electrón en un campo magnético constante de magnitud B . Utilizando el potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -(\mathbf{r} \times \mathbf{B})/2$ obtenga las autoenergías posibles (niveles de Landau) y compare con los resultados obtenidos para el potencial vector $\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = (0, Bx, 0)$ en el teórico.

Sugerencia: obtenga una lista lo más exhaustiva posible de las constantes de movimiento lo que conducirá al uso de coordenadas cilíndricas con el eje en dirección del campo magnético.