Mecánica Cuántica II

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/qmII.html

Guía 1 – Agosto de 2011

Problema 1: Al discutir el problema de autovalores del momento angular orbital se analizó el caso general de un trio $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ de operadores que satisfacen las relaciones de conmutación $[J_1, J_2] = i\hbar J_3$ (y permutaciones cíclicas de los índices). Se encontró que los autovalores de $\vec{J}^2$ son de la forma $\hbar^2 j(j+1)$ donde j es un múltiplo de 1/2 y que este autovalor es, a lo menos, de multiplicidad $2j+1$. Se construyó un sistema ortogonal de esta dimensión $\{|j,m\rangle \,:\, m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j\}$ de autovectores de J_3 con $J_3|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle$ y $\vec{J}^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle$. Usando los operadores $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$ y la relación

$$J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\;|j, m\pm 1\rangle \ ,$$

a) verifique que: $\langle j,m|J_1|j,m\rangle = \langle j,m|J_2|j,m\rangle = 0$; y
$\langle j,m|J_1^2|j,m\rangle = \langle j,m|J_2^2|j,m\rangle = (\hbar^2/2)(j(j+1) - m^2)$.

b) encuentre la representación matricial de los operadores $\vec{S}^{(s)} = (S_1^{(s)}, S_2^{(s)}, S_3^{(s)})$ de magnitud s para $s = 1/2,\ 1,\ 3/2$.

Problema 2: Considere las matrices de Pauli.

a) Verifique que si el vector real $\vec{u}$, de módulo unitario, tiene coordenadas esféricas (θ, φ) entonces los autovectores del operador $\vec{u}\cdot\vec{\sigma}$ son los vectores

$$|+,\vec{u}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \ , \ |-,\vec{u}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ \cos(\theta/2)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \ .$$

b) Demuestre que todo operador A de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2$ puede escribirse univocamente como

$$A = \alpha\mathbf{1} + \vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\vec{\beta} \in \mathbb{C}^3$, donde $\mathbf{1}$ denota el operador identidad. Obtenga condiciones sobre α y $\vec{\beta}$ para que A sea autoadjunto, unitario, o un proyector ortogonal.

c) Para $A = A^\dagger$ autoadjunto, encuentre autovalores y autovectores de A en términos de los parámetros α y $\vec{\beta}$ correspondientes.

d) Demuestre que

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{a}\cdot\vec{b}\,\mathbf{1} + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$$

donde $\vec{a}$, $\vec{b}$ son vectores tridimensionales arbitrarios cuyas componentes pueden ser, por ejemplo, operadores siempre y cuando estos conmuten con cada componente de $\vec{\sigma}$.

e) Demuestre que si $f(x)$ es real y admite desarrollo en serie de Taylor entonces para $\gamma\,\epsilon\,\mathbb{C}$ y $\vec{\beta}\,\epsilon\,\mathbb{R}^3$, de módulo unitario se cumple $f(\gamma\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}) = a\,\mathbf{1} + b\,(\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma})$. Relacione a y b con f.

f) Si $U_R = \exp(-i\theta\vec{u}\cdot\vec{\sigma}/2) = \exp(-i\theta\vec{u}\cdot\vec{S}/\hbar)$ es el operador unitario que implementa la rotación R alrededor del eje $\vec{u}$ ($|\,\vec{u}\,| = 1$) por un ángulo θ, verifique que

$$U_R = \cos(\theta/2)\mathbf{1} - i\vec{u}\cdot\vec{\sigma}\sin(\theta/2) \ ;$$

y

$$(U_R)^\dagger\,\vec{\sigma}\,U_R = (\vec{u}\cdot\vec{\sigma})\vec{u} - \vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{\sigma})\cos(\theta) + (\vec{u}\times\vec{\sigma})\sin(\theta) \ .$$

Problema 3: Considere un espín $\vec{S}$, de magnitud $s = 1/2$, con momento magnético asociado $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$ en un campo magnético $\vec{B}$ dependiente del tiempo:

$$\vec{B} = (B\cos(\omega t), -B\sin(\omega t), B_o) \ .$$

Resuelva la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}|\psi(t)\rangle \quad , \quad S_z|\psi(0)\rangle = (\hbar/2)|\psi(0)\rangle \ .$$

La estructura del campo magnético sugiere que en un sistema de referencia que rota a una frecuencia $-\omega$, el hamiltoniano debiera ser independiente del tiempo.

a) Introduzca la rotación mencionada:

$$|\phi(t)\rangle = e^{-i\omega t S_z/\hbar}|\psi(t)\rangle,$$

obtenga la ecuación de movimiento para $\phi(t)$ y resuélvala.

b) Invirtiendo la rotación verifique que

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \left\{\cos(\omega_r t/2) + i\frac{\omega_0-\omega}{\omega_r}\sin(\omega_r t/2)\right\} e^{i\omega t/2} \\ \frac{i\gamma B}{\omega_r}\sin(\omega_r t/2)\, e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

en la base de autovectores de S_z, donde ω_r y ω_o son ciertas frecuencias angulares.

c) Compare este estado con los descriptos en el Problema 2 (a) y analice el comportamiento dinámico de espín en general y en el caso $\omega_0 = \omega$.

d) Muestre que

$$\langle\psi(t)|\mu_z|\psi(t)\rangle = \frac{\gamma\hbar}{2}\left[\frac{(\omega_0-\omega)^2}{(\omega_0-\omega)^2+\gamma^2B^2} + \frac{\gamma^2B^2\cos(\omega_r t)}{(\omega_0-\omega)^2+\gamma^2B^2}\right]$$

Problema 4: *Polarización en un sistema de dos niveles.* Llamamos a un sistema de dos niveles si el espacio de estados tiene dimensión 2. El ejemplo mas pertinente es el del caso de un espín 1/2; pero aparecen en física muchos otros ejemplos, en general en discusiónes aproximativas. Como vimos en el problema 2, hay una particularidad en dimensión 2: todo operador A sobre $\mathbb{C}^2$ es combinación lineal de σ_1, σ_2, σ_3 y $\sigma_o := 1$:

$$A = \frac{1}{2}\left(tr(A)\sigma_o + \sum_{j=1}^{3} tr(A\sigma_j)\sigma_j\right) \ .$$

Reescribimos esta relación como

$$A = \frac{1}{2}\left(tr(A)\mathbf{1} + \vec{A}\cdot\vec{\sigma}\right) \quad , \quad \vec{A} := tr(A\vec{\sigma})$$

Si ψ es un estado (vector normalizado) del sistema el vector

$$\vec{P}_\psi := \langle\psi, \vec{\sigma}\psi\rangle$$

se denomina polarización (en el estado ψ). Se tiene

$$\langle\psi, A\psi\rangle = \frac{1}{2}tr(A) + \frac{1}{2}\vec{A}\cdot\vec{P}_\psi \ .$$

a) Muestre que la polarización es un vector real de largo 1.

b) Muestre que si ψ y ϕ son vectores normalizados linealmente independientes entonces $\vec{P}_\psi \neq \vec{P}_\phi$.

c) Muestre que ψ es ortogonal a ϕ si $\vec{P}_\psi = -\vec{P}_\phi$.

Problema 5: La dinámica del sistema de dos niveles está especificada por el Hamiltoniano $H(t)$, un operador autoadjunto para todo tiempo t, via la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d\psi}{dt} = H(t)\psi(t) \ , \ \ \psi(0) = \psi \ , \ \ \|\psi\| = 1 \ .$$

a) Muestre que la polarización $\vec{P}(t)$ asociada a $\psi(t)$ es solución de

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{1}{\hbar}(\vec{H}(t) \times \vec{P}(t)) \ ,$$

con la condición inicial $\vec{P}(0) = \vec{P}_\psi$. Considerando el caso de un espín 1/2 de razón giromagnética γ en un campo magnético externo $\vec{B}(t)$ dependiente del tiempo ¿cual es la relación entre $\vec{H}(t)$ y $\vec{B}(t)$?

b) Considere el caso donde el Hamiltoniano es independiente del tiempo (sistema conservativo) y concluya que $\vec{P}(t)$ precesa alrededor del eje $\vec{H}$ con velocidad angular constante y calculela.

c) Siempre en el caso conservativo, muestre que si $H \neq 0$, las únicas soluciones estacionarias (independientes del tiempo) unimodulares son $\pm|\vec{H}|^{-1}\vec{H}$. Establezca la relación entre estas polarizaciones estacionarias y los autovectores del Hamiltoniano.

Problema 6: Resuelva nuevamente el Problema 3 (campo magnético rotante) en el contexto de la polarización.