Mecánica Cuántica II

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/mcII.html

Guía 3 — Septiembre de 2011

Problema 1: Considere una partícula de carga q y masa m en un campo electromagnético $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ descripto por un potencial ϕ y un vector potencial $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi \;\; ; \;\; \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \; .$$

Defina el operador

$$\vec{\pi} \, = \, m\vec{v} \, = \, \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$$

Muestre que:
a) El momentpo canónico $\vec{p}$ no es invariante de medida mientras que $\vec{\pi}$ si lo es.

b) Muestre que $\vec{\pi}$ y $\vec{x}$ cumplen

$$[x_i, \pi_j] \, = \, i\hbar\,\delta_{ij} \quad ; \quad [\pi_i, \pi_j] \, = \, i\hbar\, q \sum_k \epsilon_{ijk} B_k \quad \text{o equivalentemente } \; \vec{\pi} \times \vec{\pi} \, = \, i\hbar\frac{q}{c}\vec{B}$$

Problema 2: Una partícula de carga q y masa m se mueve a través de un campo electromagnético.

a) Escriba la ecuación de Schödinger dependiente del tiempo para este sistema.

b) Muestre que el valor de expectación de la posición de la partícula obedece la segunda ley de Newton cuando la partícula está en un estado arbitrario $\psi(\vec{r}, t)$. Identifique la fuerza de Lorentz.

Problema 3: Un oscilador armónico unidimensional de masa m, carga q y frecuenia ω es sometido a la acción de un campo eléctrico E en la dirección del eje x positivo. Resuelva el problema y obtenga los niveles de energía.

Problema 4:*(Niveles de Landau).* El objetivo de este problema es obtener los niveles de energía de un electrón inmerso en un campo magnético $\vec{B}$. Obtenga una lista lo más exhaustiva posible de las constantes de movimiento lo que conducirá al uso de coordenadas cilíndricas con el eje en dirección del campo magnético. Resuelva el problema en dos gauges,

a) $\vec{A}(\vec{r}) = -(\vec{r}\times\vec{B})/2$. (En este gauge, usted debería poder reducir el problema al de un oscilador armónico bidimensional.)

b) $\vec{A}'(\vec{r}) \, = \, Bx\hat{j}$. (En este gauge usted debería poder reducir el problema al de un oscilador armónico unidimensional.)

Compare los resultados de (a) y (b).

Problema 5:*(Efecto Aharonov-Bohm).* a) Muestre que la transformación de Gauge

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \nabla\lambda(\vec{x}, t) \\ \phi' &= \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\lambda(\vec{x}, t)}{\partial\, t} \end{aligned}$$

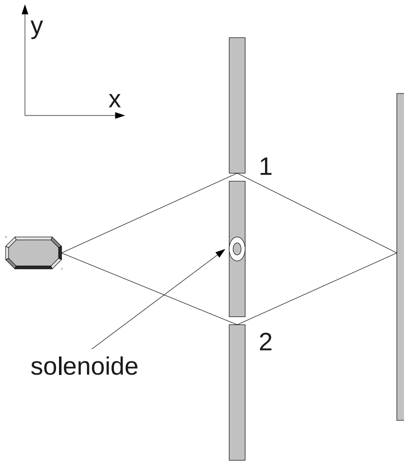
deja invariante la ecuación de Schrödinger. Ayuda: utilize el ansatz $\psi'(\vec{x}, t) = e^{\frac{ie}{\hbar c}\lambda}\psi(\vec{x}, t)$

b) Considere una partícula con carga q y un campo magnético $\vec{B}(\vec{x})$ confinado a una región Ω del espacio inccesible para la partícula tal que $\mathbb{R}^3 - \Omega$ es no simplemente conexa (por ejemplo el campo generado por un solenoide infinitamente largo). Esto significa que $\psi(\vec{x}) = 0$ en la región en que $\vec{B}(\vec{x}) \neq 0$. Muestre que en la región libre de campo la función de onda se ve modificada de la siguiente forma

$$\psi = \psi_{libre} \exp\left\{ \frac{ie}{\hbar c} \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s}) \right\}$$

en donde $d\vec{s}$ es el diferencial de camino y $\vec{A}(\vec{x})$ el potencial vector que genera el campo.

c) Considere el experimento en que se lanzan electrones contra una doble rendija para observar su interferencia. La figura muestra un esquema del mismo. El experimento presenta la siguiente



modificación: se coloca un solenoide de área transversal a y de longitud infinita en la dirección z entre las rendijas. De esta forma el campo magnético queda confinado siempre dentro del solenoide. Considerando conocidas las soluciones sin campo calcule,

1. Las soluciones para cada rendija por separado (considere la otra tapada) en presencia del campo.

2. Muestre que con las dos rendijas abiertas el campo induce una diferencia de fase entre los caminos (respecto de la solución sin solenoide) igual a $\frac{e}{\hbar c}\Phi_B$, en donde

   $$\Phi_B = a\, B_z$$

   es el flujo de campo magnético a travéz del área del solenoide.

Ayuda: La integral de línea cerrada de un campo cumple $\oint d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{s}) = \int d\vec{a} \cdot \nabla \times \vec{E}$, donde $\vec{a}$ es perpendicular a la superficie de integración. La superficie es cualquiera con borde igual a la línea cerrada de integración.

Problema 6: Derive una expresión para la densidad de corriente para la ecuación de Schrödinger en presencia de un campo magnético y pruebe que la ecuación de continuidad correspondiente es invariante de *gauge*.