Mecánica Cuántica II

Guía 5 – Octubre de 2011

http://www.famaf.unc.edu.ar/∼serra/mcII.html

Problema 1: Dada la ecuación de Schrödinger para el operador evolución temporal

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H(t)U(t,t_0),$$

escriba la solución formal para el operador $U(t,t_0)$ en los siguientes casos:

a) H es independiente del tiempo.
b) H depende del tiempo y $[H(t), H(t')] = 0$, es decir los H's a distintos tiempos conmutan entre ellos.
c) H depende del tiempo y $[H(t), H(t')] \neq 0$, es decir, H NO conmuta a distintos tiempos.

Problema 2: Usando el oscilador armónico unidimensional como ejemplo, ilustre las diferencias entre las representaciones de Schrödinger y Heisenberg. Discuta en particular la evolución temporal de los estados y de las variables dinámicas x y p. Sugerencia: derivar las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para $a(t)$ y $a^\dagger(t)$.

Problema 3: Dado un sistema arbitrario perturbado de tal manera que su Hamiltoniano es $H(t) = H_0(t) + V(t)$, el vector de estado del sistema en la representación de interacción (o de Dirac), $|\psi_I(t)\rangle$ está definido a partir del vector de estado en la representación de Schrödinger $|\psi_S(t)\rangle$ por:

$$|\psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger(t,t_0)\,|\psi_S(t)\rangle$$

donde el operador evolución $U_0(t,t_0)$ satisface la ecuación

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_0(t,t_0) = H_0U_0(t,t_0).$$

a) Muestre que la evolución de $|\psi_I(t)\rangle$ está dada por:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi_I(t)\rangle = V_I(t)\,|\psi_I(t)\rangle$$

donde $V_I(t)$ es el operador transformado de $V(t)$ según

$$V_I(t) = U_0^\dagger(t,t_0)V(t)U_0(t,t_0).$$

Explique cualitativamente porqué cuando la perturbación $V(t)$ es mucho más chica que $H_0(t)$, el movimiento del vector $|\psi_I(t)\rangle$ es mucho más lento que el de $|\psi_S(t)\rangle$.

b) Muestre que la ecuación diferencial anterior es equivalente a la ecuación integral

$$|\psi_I(t)\rangle = |\psi_I(t_0)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' V_I(t')\,|\psi_I(t')\rangle$$

donde $|\psi_I(t_0)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle$.

c) Resolviendo esta ecuación integral por iteraciones, muestre que el ket $|\psi_I(t)\rangle$ puede ser expandido en serie de potencias en V de la forma:

$$|\psi_I(t)\rangle = \left\{\mathbf{1} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' V_I(t') + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{t_0}^{t} dt' V_I(t')\int_{t_0}^{t} dt'' V_I(t'') + ...\right\}|\psi_I(t_0)\rangle\,.$$

Problema 4: Considere la dinámica estudiada en el Problema 3 de la Guía 1, de un espín 1/2 en un campo magnético externo dependiente del tiempo $\vec{B} = (B\cos(\omega t), -B\,\mathrm{sen}\,(\omega \mathrm{t}), \mathrm{B_o})$. Si el estado inicial α es un autovector normalizado de S_z al autovalor $\hbar/2$, calcule la probabilidad de transición de

$\psi(t)$ al estado β donde β es un autovector de S_z al autovalor $-\hbar/2$. Obtenga la misma probabilidad de transición a primer orden en la magnitud B del campo rotante y compare con la exacta.

Problema 5: Considere un átomo de hidrógeno en un campo eléctrico $\vec{E} = (0, 0, E(t))$,

$$E(t) = \frac{A\tau}{\pi e} \frac{1}{t^2 + \tau^2}$$

donde A y τ son constantes positivas (τ es el semiancho a la mitad del valor máximo). Suponga que para $t \to -\infty$ el átomo está en el estado fundamental y calcule la probabilidad de transición a un estado $2p$ para $t \to \infty$.

Problema 6: Un átomo de hidrógeno se encuentra en su estado fundamental en $t = -\infty$. Se aplica un campo eléctrico $\vec{E} = \mathcal{E} \exp\left(-t^2/\tau^2\right) \hat{k}$. Muestre que la probabilidad de que el átomo de hidrógeno termine ($t \to \infty$) en alguno de los estados $n = 2$ es, a primer orden,

$$P(n = 2) = \left(\frac{e\mathcal{E}}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{2^{15} a_o^2}{3^{10}}\right) \pi\tau^2 \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{2}\right)$$

donde $\omega = \left(E_2 - E_1\right)/\hbar$. ¿Depende la respuesta de la incorporación del espín al esquema?

Problema 7: Considere una partícula en el estado fundamental de una caja de largo L. A partir de argumentos semiclásicos concluya que el período natural asociado con su movimiento es $T \simeq mL^2/\hbar\pi$. Si la caja se expande simétricamente al doble de su tamaño en un tiempo $\tau \ll T$, ¿cuál es la probabilidad de encontrar la partícula en el estado fundamental de la nueva caja?

Problema 8: Un oscilador armónico de frecuencia ω y masa m está en el estado fundamental de $H = H_0 + H_1$, donde la perturbación independiente del tiempo H_1 corresponde al potencial lineal $(-fx)$. Si en $t = 0$, H_1 se desconecta abruptamente, muestre que la probabilidad de que el sistema esté en el autoestado n-ésimo de H_0 estará dada por la distribución de Poisson

$$P(n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \qquad \text{donde } \lambda = \frac{f^2}{2m\omega^3\hbar}$$

Problema 9: Determine el cambio en las soluciones n-ésima y m-ésima de la ecuación de Schrödinger debido a la existencia de una perturbación periódica de la forma $V = Fe^{-i\omega t} + Ge^{i\omega t}$, cuya frecuencia es tal que $E_m^{(0)} - E_n^{(0)} = \hbar(\omega + \epsilon)$ donde ϵ es una cantidad pequeña.

Problema 10: Mostrar que para sistemas conservativos, si en $t = 0$ el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ es un autovector de un observable A con autovalor a, para $t > 0$ $|\psi(t)\rangle$ será un autovector del operador $A_H(-t)$ con el mismo autovalor a.

Problema 11: El estado fundamental de un átomo de hidrógeno está sujeto al siguiente potencial dependiente del tiempo $V(\vec{r}, t) = V_o \cos(kz - \omega t)$. Usando teoría de perturbaciones obtenga una expresión para la probabilidad de transición por unidad de tiempo para la emisión del electrón con momento $\vec{p}$.

Problema 12: *Efecto Auger, transición no radiativa o autoionización.* Considere un átomo de helio en un estado excitado en el cual los dos electrones de encuentran en el estado 2s. Encuentre la probabilidad de transición por unidad de tiempo hacia un estado final en el cual un electrón se encuentra en el estado 1s y el otro en el continuo con momento $\vec{p}$.

Problema 13: *Decaimiento $\beta^{\pm}$.* Calcule la probabilidad de excitación del nivel 2s de un átomo hidrogenoide si ocurre un cambio súbito de la carga nuclear ($Z \to Z \pm 1$).