Mecánica Cuántica II

http://www.famaf.unc.edu.ar/~serra/mcII.html

Guía 3 — Septiembre de 2011
Solución del problema 3

Problema 3: *Niveles de Landau:* El objetivo de este problema es obtener los niveles de energía de un electrón inmerso en un campo magnético $\vec{B}$ uniforme. Obtenga una lista lo más exhaustiva posible de las constantes de movimiento lo que conducirá al uso de coordenadas cilíndricas con el eje en dirección del campo magnético. Resuelva el problema en dos gauges,

a) $\vec{A}(\vec{r}) = -(\vec{r}\times\vec{B})/2$. (En este gauge, usted debería poder reducir el problema al de un oscilador armónico bidimensional.)

b) $\vec{A}'(\vec{r}) = Bx\hat{j}$. (En este gauge usted debería poder reducir el problema al de un oscilador armónico unidimensional.)

Compare los resultados de (a) y (b).

Solución:

Dejamos para el estudiante resolver explicitamente la Ec. de Schrödinger en los distintos casos por el método estandar, usaremos aca el método algebraico.

Sin perder generalidad, el campo magnético define la dirección z: $\vec{B} = B_0\,\hat{k}$, pedimos ademas (solo para no andar con cuidados por el signo en las raices) que $qB_0 > 0$. El problema de una partícula cargada en tal campo evidentemente posee simetría azimutal e invarianza traslacional. Se resuelve usualmente en dos *gauges* diferentes:

a) *Gauge* simétrico. En este *gauge* se evidencia la simetría azimutal, pero queda escondida la invarianza translacional.

b) *Gauge* de Landau, llamado asi por ser el *gauge* que utilizó en su trabajo original Lev Landau. En realidad hay dos *gauges* equivalentes que son usualmente usados, ambos esconden la simetría azimutal, uno, con el cual trabajaremos, es invariante ante translaciones en la dirección y: $\vec{A}'(\vec{r}) = B_0 x\hat{j}$, el otro en la dirección x: $\vec{A}''(\vec{r}) = -B_0 y\hat{i}$

Ninguno de los *gauge* descriptos depende de la coordenada z, asi $[H, p_z] = 0$ y la función de onda y las autoenergías cumplen

$$\psi(\vec{x}) = e^{ik_z z}\,\psi(x,y) \quad ; \quad E_{k_z,n} = E_n + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\,,$$

donde n representa todos los otros números cuánticos. Podemos entonces resolver el problema como bidimensional, obteniendo las funciones $\psi(x,y)$ y los autovalores E_n, pero recordando siempre que el problema es tridimensional, las energías forman un continuo en el intervalo $[E_0, \infty)$ y la función de onda completa no es normalizable.

Antes de particularizar el *gauge* notemos que el Hamiltoniano tiene la forma

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\,\vec{A}\right)^2 = \frac{\vec{\pi}^2}{2m}\,.$$

Del ejercicio (1) de esta guía sabemos que

$$[\pi_x, \pi_x] = 0 \quad ; \quad [\pi_y, \pi_y] = 0 \quad ; \quad [\pi_x, \pi_y] = i\hbar\frac{q}{c}B_0\,,$$

Estas relaciones de conmutación nos dicen que podemos definir operadores creación y aniquilación de la forma:

$$a \,=\, \sqrt{\frac{c}{2q\hbar B_0}}\,(\pi_x + i\pi_y) \quad ; \quad a^\dagger \,=\, \sqrt{\frac{c}{2q\hbar B_0}}\,(\pi_x - i\pi_y)\ ,$$

Estos operadores cumplen

$$[a, a^\dagger] \,=\, 1$$

y el Hamiltoniano toma la forma standar

$$H \,=\, \left(a^\dagger\, a + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

donde $\omega = qB_0/mc$ es la frecuencia clásica de ciclotrón. La solución de este Hamiltoniano es archiconocida, siendo sus autoenergías $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$; $n = 0, 1, \ldots$. Estos niveles discretos son conocidos como *niveles de Landau.* Notar que los hemos obtenido **sin especificar aun un gauge particular**.

Cálculo de autofunciones

Claramente las autofunciones si dependen del *gauge* elegido, asi que debemos calcularlas en cada caso. Calcularemos en particular los estados fundamentales en cada caso, ya que sabemos que los estados excitados se obtienen simplemente aplicando el operador $a^\dagger$ repetidamente. Sabemos que el estado fundamental de un oscilador armónico se obtiene como solución de la ecuación $a\,\psi_0 \,=\, 0$. La resolvamos en cada *gauge*.

Gauge Simétrico

En este caso tenemos:

$$\vec{A} \,=\, \frac{1}{2}\,(-y, x)\, B_0 \;\to\; \pi_x \,=\, p_x + \frac{qB_0}{2c} y\ ;\ \pi_y \,=\, p_y - \frac{qB_0}{2c} x$$

obteniendo

$$a \,=\, -i\sqrt{\frac{c}{2q\hbar B_0}}\left(\hbar(\partial_x + i\partial_y) \,+\, \frac{qB_0}{2c}(x+iy)\right) \;\Rightarrow\; \left(\partial_x + i\partial_y \,+\, \frac{qB_0}{2\hbar c}(x+iy)\right)\,\psi_0(x,y) \,=\, 0\,.$$

Por inspeccion notamos dos cosas

- una Gaussiana es solución.
- $(\partial_x + i\partial_y) f(x+iy) \,=\, 0$

Entonces obtenemos para *los (infinitos!)* estados fundamentales

$$\psi_{0,f}(x,y) \,=\, f(x+iy) e^{-\frac{qB_0}{4\hbar c}(x^2+y^2)}$$

donde a f solo le podemos pedir ser análitica, asegurando que $\psi_{0,f}$ es finita en el origen y monovaluada. En particular si elegimos entonces una base para funciones de este tipo $f_m(w) = w^m$; $m = 0, 1, \ldots$, entonces tenemos que $\psi_{0,m}$ es autofunción de L_z con autovalor m.

Gauge de Landau

En este caso $\vec{A} = B_0 x \hat{\jmath}$, obteniendo $\pi_x = p_x$, $\pi_y = p_y - qB_0 x/c$

$$\left(\partial_x + i\partial_y + \frac{qB_0}{\hbar c}x\right)\psi_0(x,y) = 0\,,$$

proponiendo una solucion de la forma:

$$\psi(x,y) = e^{ik_y y}\psi(x)$$

tenemos

$$\partial_x \psi(x) = \left(k_y - \frac{qB_0}{\hbar c}\right)\psi(x)\,,$$

La solucion es ahora una Gaussiana no centrada:

$$\psi(x) = e^{-\frac{qB_0}{2\hbar c}\left(x - \frac{\hbar c}{qB_0}k_y\right)^2}\,,$$

resultando tambien en infinitos estados fundamentales.

Nota sobre la relacion entre estados fundamentales: En el teórico se mostro que autofunciones obtenidas en diferentes gauge difieren en una fase determinada por la función que relaciona los gauges. Sin embargo, resulta evidente que las funciones de onda encontradas en ambos *gauges* **no** difieren solo en un factor de fase. La explicación de esto reside en observar que esta relación existe si el estado en cuestión es no degenerado. En nuestro caso el estado fundamental es infinitamente degenerado, por lo tanto lo que debe probarse es que *un* estado fundamental en un gauge debe pertencer al subespacio expandido por *todos* los estados fundamentales del otro gauge. Este problema es de alta complejidad técnica y no lo desarrollaremos.